第39卷第3期 数 学 学 报 Vol.39, No. 3
1996年5月 ACTA MATHEMATICA SINICA May, 1996

给定能量的 N 体型问题多个几何上不同的周期轨道的存在性

张世清

(重庆大学应用数学系，重庆 630044)

摘 要: 本文利用等变的 Ljusternik-Schnirelmann 理论证明了平面上的一类给定能量的 N 体型问题至少存在 $2\cdot(N-2)\cdot 2^{N-3}$ 个几何上不同的非碰撞周期轨道.

关键词: N 体型问题、几何上不同的周期轨道、等变 Ljusternik-Schnirelmann 理论

1 引言

N- 体问题是天体力学中的著名难题，由于它特殊的性质和内在的复杂性，近三百年来，它一直吸引着众多优秀的数学家、天文学家和物理学家.

近几年来, 人们已开始将大范围变分理论这一现代数学工具用于研究 N- 体问题的周期解. 对给定周期的周期轨道的存在性问题，已有较多的结果 [2−6,9,11]. 但据作者所知，用变分方法研究给定能量的 N- 体问题的周期轨道的存在性，仅有 Ambrosetti-Coti Zelati 于 1992 年发表的一篇论文 [1], 他们利用 C^1 函数的山路引理证明了给定负能量的具弱力型势的 N- 体型问题至少存在一个广义周期轨道 (碰撞时刻组成的集合的测度为 0).

由于 $\mathbb{R}^k$ 中的 N- 体问题内蕴 $Z_2\times S^1\times O(k)$ 对称不变性，因此为了得到几何上不同的周期轨道, 必须考虑这个群的作用, 但因为这个群的作用会引起拓扑上的困难, 因而多个几何上不同的周期轨道的存在性方面的结果很少. 到目前为止，仅有 Coti Zelati[4] 及 Bessi-Coti Zelati[3] 研究了平面上给定周期的 N- 体问题多个几何上不同的周期轨道的存在性.

本文利用 $S^1\times O(2)$ 的等变的 Ljusternik-Schnirelmann 理论研究了平面上的一类给定能量的对称 N- 体型问题多个几何上不同的非碰撞周期轨道的存在性. 获得此结果的关键是构造了一个具有特殊 $S^1\times O(2)$ 等变 Ljusternik-Schnirelmann 畴数且变分泛函在其上的上界易于估计的特殊集合.

我们令 $\Omega=\mathbb{R}^k\backslash\{0\}$, 考虑如下形式的势函数：

$$V(x)=V(x_1,\cdots,x_N)=\frac{1}{2}\sum_{1\le i\ne j\le N}V_{ij}(x_i-x_j), \tag{1.1}$$

其中 $x_i\in\mathbb{R}^k$, $x=(x_1,\cdots,x_N)\in\mathbb{R}^{k_N}$, $V_{ij}\in C^1(\Omega,\mathbb{R})$.

1994 年 9 月 19 日收到.
本文得到国家自然科学基金 (青年基金) 的部分资助.

给定 $m_i > 0$, $(i = 1, \cdots, N)$ 及 $h \in \mathbb{R}$, 我们研究以下方程的周期解.

$$\text{(Ph)} \qquad \begin{cases} m_i \ddot{x}_i + V'_{x_i}(x_1, \cdots, x_N) = 0, \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} m_i |\dot{x}_i|^2 + V(x_1, \cdots, x_N) = h, \end{cases} \qquad 1 \le i \le N.$$

定义 1.1 若 (Ph) 的解 $x = (x_1, \cdots, x_N)$ 满足以下条件:

(i) $x_i \in C^2(0, T; \mathbb{R}^k)$,

(ii) 对 $\forall 1 \le i \ne j \le N$, 及 $\forall t \in [0, T]$ 有 $x_i(t) \ne x_j(t)$,

则称 x 是 (Ph) 的非碰撞周期轨道.

定义 1.2 设 x, y 是 (Ph) 的二个周期解, 如存在微分同胚 $\varphi : S^1 \to S^1$ 及 $R : O(2) \to O(2)$ 使得 $y = R \circ x \circ \varphi$, 则称 x 与 y 在几何上是相同的; 否则称为 x 与 y 在几何上是不同的. x 与 y 在几何上是相同的等价于 x 与 y 属于同一轨道集, 即它们具有相同的周期, 并且存在 $\theta \in S^1$ 及 $R \in O(2)$ 使得 $y(t) = Rx(t + \theta)$.

对于 (Ph), 我们有以下有关多个几何上不同的非碰撞周期轨道的存在性定理:

定理 1.3 假设 V 取 (1.1) 的形式且 V_{ij} 及 V 满足:

(V1) $V_{ij}(\xi) = V_{ji}(\xi)$, $\forall i \ne j$, $\xi \in \mathbb{R}^2$, 及 $(U_1, \cdots, U_N) = (V(RU_1, \cdots, RU_N)$, $\forall R \in O(2)$.

(V2) 存在 $\alpha > 2$ 及 $a > b > 0$ 使 $\forall x_i \in \mathbb{R}^2$ 及 $x_i \ne x_j$ 有

$$-\frac{a}{2} \sum_{1 \le i \ne j \le N} \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|^\alpha} \le V(x_1, \cdots, x_N) \le -\frac{b}{2} \sum_{1 \le i \ne j \le N} \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|^\alpha},$$

则对满足以下条件的能量 h: $c_5 > \frac{1}{9} c_4$, 其中

$$\begin{aligned} c_5 &= 2\bigg(\sum_{i=1}^{N} \pi^2 i^2 m_i\bigg) \cdot \bigg(h + \frac{a}{2} \sum_{i \ne j} \frac{m_i m_j}{|i - j|^\alpha}\bigg), \\ c_4 &= \frac{\alpha}{2^{\frac{2+\alpha}{2}}} \cdot (\alpha - 2)^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \cdot c_3^{2/\alpha} \cdot h^{1 - \frac{2}{\alpha}}, \\ c_3 &= (4\underline{m})^{\alpha/2} \cdot c_2, \quad \underline{m} = \min\{m_i \mid i = 1 - N\}, \\ c_2 &= b c_1 (\overline{m})^{-\alpha/2}, \quad \overline{m} = \max\{m_i \mid i = 1 - N\}. \\ c_1 &= 2^{-(\alpha+1)/2} \cdot \bigg(\sum_{1 \le i \ne j \le N} m_i m_j\bigg)^{(2+\alpha)/2} \cdot m^{-\alpha/2}, \\ m &= \sum_{i=1}^{N} m_i. \end{aligned}$$

那么 (Ph) 至少存在 $2 \cdot (N-2) \cdot 2^{N-3}$ 个以 h 为能量的几何上不同的非碰撞周期轨道.

推论 1.4 在定理 1.3 中, 若 $N = 3$, 且 $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, $\alpha = 3$. 则对 $\forall h > 1$, (Ph) 至少存在 2 个以 h 为能量的几何上不同的非碰撞周期轨道.

2 主要结果的证明

我们引入下面的记号: $H = H^{1,2}(S^1; \mathbb{R}^2)$, $H_\# = \Big\{u \in H \mid u\Big(t + \frac{1}{2}\Big) = -u(t)\Big\}$, $E = \{u = (u_1, \cdots, u_N) \mid u_i \in H_\#, i = 1, \cdots, N\}$, $\Lambda_0 = \{u \in E \mid u_i(t) \ne u_j(t), \forall t \in [0, 1], i \ne j\}$.

对 $\forall u,v\in H_\#$, 记： $\langle u,v\rangle=\int_0^1\dot u\cdot\dot v dt$, $\|u\|^2=\int_0^1|\dot u|^2dt$. 很容易证明， $\|u_i\|$ 是 $H_\#$ 上的范数且与通常的范数等价，我们还有不等式 $\|u_i\|\ge 4|u_i|_\infty$. 因此对 $\forall u=(u_1,\cdots,u_N)\in E$, 若令 $\|u\|_E^2=\sum\limits_{i=1}^N m_i\|u_i\|^2$, 则有：

$$\|u\|_E^2\ge 4^2\underline{m}\sum_{i=1}^N|u_i|_\infty^2=16\underline{m}|u|_\infty^2, \tag{2.1}$$

其中 $\underline{m}=\min\{m_i\mid i=1-N\}$, $|u|_\infty^2=\sum\limits_{i=1}^N|u_i|_\infty^2$.

在 Λ_0 上定义泛函

$$f(u)=\frac{1}{2}\|u\|_E^2\cdot\int_0^1(h-V(u))dt. \tag{2.2}$$

类似于 [1] 或 [8] 的证明，我们有：

引理 2.1 设 $u\in\Lambda_0$ 是 f 的临界点且 $\|u\|_E>0$. 令

$$\omega^2=\frac{\int_0^1 V'(u)\cdot udt}{\|u\|_E^2}>0, \tag{2.3}$$

则 $x(t)=u(\omega t)$ 是 (Ph) 的非碰撞周期轨道.

引理 2.2[5] 设 $X=(x_1,\cdots,x_N)\in\mathbb{R}^k\times\cdots\times\mathbb{R}^k$, k 是自然数，则

$$\frac{1}{2}\sum_{1\le i\ne j\le N}\frac{m_im_j}{|x_i-x_j|^\alpha}\ge c_1\frac{1}{\left(\sum\limits_{i=1}^N m_i|x_i|^2\right)^{\alpha/2}}, \tag{2.4}$$

其中 c_1 与第一段中的 c_1 相同.

引理 2.3 设 V 满足定理 1.3 中的 (V2), 则

$$-V(x)\ge c_2\cdot\frac{1}{\left(\sum\limits_{i=1}^N|x_i|^2\right)^{\alpha/2}}, \tag{2.5}$$

其中 c_2 即为定理 1.3 中的 c_2.

证明 由 (V2) 及引理 2.2 有 $-V(x)\ge b\cdot c_1\frac{1}{\left(\sum\limits_{i=1}^N m_i|x_i|^2\right)^{\alpha/2}}$. 又因 $\sum\limits_{i=1}^N m_i|x_i|^2\le\overline{m}\cdot\sum\limits_{i=1}^N|x_i|^2$, 即得 (2.5) 式.

引理 2.4 假设 (V1), (V2) 成立，则 $f\in C^1(\Lambda_0,\mathbb{R})$, 且对 $\forall u_n\overset{w}{\rightharpoonup}u\in\partial\Lambda$ 有 $f(u_n)\to+\infty$.

证明 由 (V2) 知， V_{ij} 在 $x=0$ 满足 Gordon 强力条件 [7], 从而易证 [7]

$$\forall u_n\overset{w}{\rightharpoonup}u\in\partial\Lambda_0,\quad\int_0^1 V(u_n)dt\to-\infty. \tag{2.6}$$

(i) 若 $u(t)\equiv 0$, 则由嵌入定理可知,

$$|u_n|_\infty\to 0,\quad n\to\infty. \tag{2.7}$$

故由不等式 (2.1), (V2) 及引理 2.3, 有

$$f(u_n)=\frac{1}{2}\|u_n\|_E^2\cdot\int_0^1(h-V(u_n))dt\geq\frac{1}{2}\|u_n\|_E^2\cdot\int_0^1(-V(u_n))dt$$
$$\geq 8\underline{m}|u_n|_\infty^2\cdot c_2\int_0^1|u_n|^{-\alpha}dt\geq 8\underline{m}c_2|u_n|_\infty^2\cdot|u_n|_\infty^{-\alpha}.$$

因为 $\alpha>2$, 故当 $n\to\infty$ 时, $f(u_n)\to+\infty$.

(ii) 若 $u(t)$ 不恒等于 0, 则 $\|u\|_E^2=\sum\limits_{i=1}^N m_i\|\dot u_i\|_2^2\neq 0$. 事实上, 若 $\|u\|_E^2=0$, 则 $u_i(t)\equiv c$. 由于 $u_i\big(t+\frac{1}{2}\big)=-u_i(t)$, 故 $u_i(t)\equiv 0$, 矛盾. 因此由函数 $g(u)=\|u\|_E$ 的弱下半连续性有

$$\varliminf_{n\to\infty}\|u_n\|_E\geq\|u\|_E>0. \tag{2.8}$$

另一方面, 由引理 2.4 中的 (2.6) 式, 有 $-\int_0^1 V(u_n)dt\to+\infty$, $n\to\infty$, 即 $f(u_n)=\frac{1}{2}\|u_n\|_E^2\cdot\int_0^1(h-V(u_n))dt\to+\infty$, $n\to\infty$.

引理 2.5 f 在 Λ_0 上满足 Palais-Smale 紧性条件.

证明 设序列 $\{u_n\}\subset\Lambda_0$ 满足

$$\begin{cases}|f(u_n)|\leq M,\\ f'(u_n)\to 0.\end{cases} \tag{2.9}$$

则由 $f(u_n)\leq M$ 及 $V(u_n)\leq 0$ 可知, $0\leq-\frac{1}{2}\|u_n\|_E^2\cdot\int_0^1 V(u_n)dt\leq M-\frac{h}{2}\|u_n\|_E^2$. 故 $\|\dot u_n\|$ 有界. 因而存在 u_n 的弱收敛子列, 仍记为 u_n, 使 $u_n\overset{w}{\rightharpoonup}u\in\overline{\Lambda}_0$ (Λ_0 的闭包).

又由引理 2.4 及 $f(u_n)\leq M$ 知, $u\in\Lambda_0$, 故 $\dot u(t)\not\equiv 0$, 因为否则 $\forall 1\leq i,j\leq N$ 有 $u_i(t)=u_j(t)\equiv 0$, 这与 $u\in\Lambda_0$ 及 Λ_0 的定义矛盾. 故 $\|u\|_E>0$. 又显然成立 $V(u_n)\to V(u)$, $\langle V'(u_n),u_n\rangle\to\langle V'(u),u\rangle$.

进一步由于 $\|u_n\|_E\geq\varliminf\|u_n\|_E\geq\|u\|_E>0$, $\langle f'(u_n),u_n\rangle\to 0$,

$$\int_0^1(h-V(u_n))dt=\frac{1}{2}\int_0^1\langle V'(u_n),u_n\rangle dt+\frac{\langle f'(u_n),u_n\rangle}{\|u_n\|_E^2},$$

我们立即可得

$$\int_0^1(h-V(u_n))dt\to\frac{1}{2}\int_0^1\langle V'(u),u\rangle dt. \tag{2.10}$$

又因为 $h>0$, $V(u_n)<0$, 故有 $\int_0^1(h-V(u_n))dt>h$, $\frac{1}{2}\int_0^1\langle V'(u),u\rangle dt>0$.

又由于 $f'(u_n)\to 0$, 所以有

$$\langle u_n,v\rangle\int_0^1(h-V(u_n))dt-\frac{1}{2}\|u_n\|_E^2\cdot\int_0^1\langle V'(u_n),v\rangle dt\to 0,$$
$$\forall v\in H^N=H\times\cdots\times H.$$

故由 (2.10) 式以及 $\int_0^1\langle V'(u_n),v\rangle dt\to\int_0^1\langle V'(u),v\rangle dt>0$ 即知, $u_n\overset{s}{\to}u$. 故 f 在 Λ_0 上满足 Palais-Smale 紧性条件.

引理 2.6 f 在 Λ_0 上有正下界估计: $\inf_{u\in\Lambda_0}f(u)\geq c_4$, 其中 c_4 即为定理 1.3 中的常数 c_4.

证明 由引理 2.3 可知, $\forall u \in \Lambda_0$ 有

$$f(u) = \frac{1}{2}\|u\|_E^2 \cdot \int_0^1 (h - V(u))dt \quad \geq \frac{1}{2}\|u\|_E^2 \cdot \int_0^1 \left(h + c_2 \cdot |u|^{-\alpha}\right)dt.$$

又由 (2.1) 式及 $\forall t \in [0,1]$, $|u| \leq |u|_\infty$, 故 $\|u\|_E^2 \geq 16\underline{m}|u|^2$, $f(u) \geq \frac{h}{2}\|u\|_E^2 + \frac{c_3}{2}\|u\|_E^{2-\alpha}$, 其中 $c_3 = (16\underline{m})^{\frac{\alpha}{2}} \cdot c_2$.

令 $\varphi(t) = \frac{h}{2}t^2 + \frac{c_3}{2}t^{2-\alpha}$. 显然 $\forall u \in \Lambda_0$, $f(u) \geq \min\limits_{t>0}\varphi(t)$, 而

$$\varphi'(t) = ht + \frac{2-\alpha}{2}c_3 t^{1-\alpha}, \quad \varphi''(t) = h + \frac{(2-\alpha)(1-\alpha)}{2}c_3 t^{-\alpha} > 0, \quad \forall t > 0.$$

故 $\varphi(t)$ 在 $t > 0$ 上是严格凸函数，即存在唯一最小值点 t_0 满足：

$$\varphi'(t_0) = 0, \quad t_0 = \left(\frac{(\alpha-2)c_3}{2h}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$
$$\min_{t>0}\varphi(t) = \alpha \cdot (\alpha-2)^{\frac{2-\alpha}{2}} \cdot 2^{-\frac{2+\alpha}{\alpha}} \cdot c_3^{2/\alpha} \cdot h^{1-\frac{2}{\alpha}} > 0.$$

下面我们要定义一个 $S^1 \times O(2)$ 不变集 A, 并对 f 在 A 上的上界进行估计.

先令 $Z_i = \{v(t) = i\xi\cos 2\pi t + i\eta \sin 2\pi t \mid \xi, \eta \in \mathbb{R}^2,\ |\xi| = |\eta| = 1,\ \langle \xi, \eta\rangle = 0,\ i = 1, \cdots, N\}$. 再令 $A = Z_1 \times Z_2 \times \cdots \times Z_N$. 则 $\forall u = (u_1, \cdots, u_N) \in A$, 存在 $\xi_i, \eta_i \in \mathbb{R}^2$, 且

$$|\xi_i| = |\eta_i| = 1, \quad \xi_i \cdot \eta_i = 0, \quad u_i(t) = i\xi_i \cos 2\pi t + i\eta_i \sin 2\pi t.$$

故 $|u_i(t)|^2 = i^2$, $|u_i(t) - u_j(t)|^2 \geq |u_i(t)|^2 + |u_j(t)|^2 - 2|u_i(t)| \cdot |u_j(t)| = i^2 + j^2 - 2ij = (i-j)^2$, 即 $|u_i(t) - u_j(t)| \geq |i-j|$, $\frac{1}{|u_i(t)-u_j(t)|^\alpha} \leq \frac{1}{|i-j|^\alpha}$. 故由已知假设 (V2), 有 $-V(u) \leq \frac{a}{2}\sum_{1\leq i\neq j\leq N}\frac{m_i m_j}{|i-j|^\alpha}$.

又因为 $\dot{u}_i(t) = -2\pi i\xi_i \sin 2\pi t + 2\pi i\eta_i \cos 2\pi t$, 故 $|\dot{u}_i|^2 = 4\pi^2 i^2$,

$$\|u\|_E^2 = \sum_{i=1}^N m_i \int_0^1 |\dot{u}_i|^2 dt = \sum_{i=1}^N 4\pi^2 i^2 m_i.$$

因此我们有以下关于 f 在 A 上的上界估计：

引理 2.7 $\forall u \in A$, $f(u) \leq c_5$, 其中 $c_5 = 2\Big(\sum\limits_{i=1}^N \pi^2 i^2 m_i\Big) \cdot \Big(h + \frac{a}{2}\sum\limits_{i\neq j}\frac{m_i m_j}{|i-j|^\alpha}\Big)$.

下面我们讨论 $S^1 \times O(2)$ 不变集 A 的等变 Ljusternik-Schnirelmann 畴数，并应用 min max 原理导出 f 的多个临界值的存在性. 最后，通过估计临界点 (即周期轨道) 的极小周期导出我们研究的给定能量问题 (Ph) 多个几何上不同的非碰撞周期轨道的存在性.

我们首先观察到集 A 微分同胚于 $T_1S^1 \otimes \cdots \otimes T_1S^1$ (N 个 S^1 的单位切丛的张量积), 从而 A 微分同胚于 Coti Zelati[4] 构造的有关平面上的 N- 体问题的临界流形，故由 Coti Zelati[4] 的结果有：

引理 2.8 $\operatorname{Cat}(A/S^1 \times O(2)) \geq 2 \cdot (N-2) \cdot 2^{N-3}$.

注记 尽管我们这里构造的集 A 微分同胚于 Coti Zelati[4] 构造的临界流形 $Z_{(n_1,\cdots,n_N)}$, 但是变分泛函 f 在 A 上的上界更容易估计，而 f 在 Coti Zelati 的 $Z_{(n_1,\cdots,n_N)}$ 上的上界很难估计.

引理 2.9 设 X 是 Banach 空间， Λ_0 是 X 的开子集， $f \in C^1(\Lambda_0, \mathbb{R})$, 且 f 是 $S^1 \times O(2)$ 不变集，又设 f 在 Λ_0 上满足 Palais-Smale 紧性条件及边界条件

(BC) 若 $u_n \overset{w}{\rightharpoonup} u \in \partial\Lambda_0$, 则 $f(u_n) \to +\infty$. 令

$$c_m = \inf_{\mathrm{Cat}\,(A/S^1 \times O(2)) \geq m} \sup_{x \in A} f(x), \quad m = 1, 2, \cdots,$$

则 (1) 当 $-\infty < c_m < +\infty$ 时，c_m 是 f 的临界值；(2) 若 $-\infty < c = c_{m+1} = \cdots = c_{m+k} < +\infty$, 那么， $\mathrm{Cat}\,(K_c/^1 \times O(2)) \geq k$, 其中 $K_c = \{x \in \Lambda \mid f'(x) = 0, f(x) = c\}$; (3) $c_m \leq c_{m+1}$.

注记 在证明上述引理时，只须注意到边界条件 (BS) 保证了开集 Λ 的完备性，其余部分的证明是标准的 [10].

引理 2.10 设 u 是 f 在 Λ_0 上的临界点，其最小周期为 $1/l$, $l \neq 1$, 则 (i) $l \geq 3$, (ii) $v(t) = u(t/l)$ 也是 f 在 Λ_0 上的临界点且有 $f(\omega) = \frac{1}{l^2} f(u) = \frac{1}{9} f(u)$.

证明 (i) 若 $l = 2$, 即 $u\big(t + \frac{1}{2}\big) = u(t)$. 则由 $u \in \Lambda_0$ 知， $u\big(t + \frac{1}{2}\big) = -u(t)$, 故 $u(t) = (u_1(t), \cdots, u_N(t)) \equiv 0$. 这与 $u \in \Lambda_0$ 即 $\forall t \in [0,1]$, $i \neq j$, $u_i(t) \neq u_j(t)$ 矛盾.

(ii) 因为 $\int_0^1 |\dot{v}(t)|^2 dt = \frac{1}{l^2} \int_0^1 |\dot{u}(t)|^2 dt$, $\int_0^1 (h - V(v)) dt = \int_0^1 (h - V(u)) dt$, 故 $f(v) = \frac{1}{l^2} f(u) \leq \frac{1}{9} f(u)$.

下面我们利用上述诸引理来证明定理 1.3.

由引理 2.4, 2.5 及 2.8 知， Λ_0 上的泛函 f 满足引理 2.9 的所有假设，且由引理 2.6 和 2.7 知， $-\infty < c_m < +\infty$, 因此 f 在 Λ_0 上至少存在 $2 \cdot (N-2) \cdot 2^{N-3}$ 个临界值，而由引理 2.6, 2,7 及 2.10 又可知，这 $2 \cdot (N-2) \cdot 2^{N-3}$ 个临界值对应的临界点的最小周期均为 1. 所以由引理 2.1 及 2.9 知，在定理 1.3 的假设下， N- 体型问题 (Ph) 至少存在 $2 \cdot (N-2) \cdot 2^{N-3}$ 个几何上不同的非碰撞周期轨道.

推论 1.4 很容易由定理 1.3 直接推出.

参 考 文 献

[1] Ambrosetti A, Coti Zelati V. Closed orbits of fixed engery for a class of N-body problems. *Ann IHP Analyse Nonlinéaire,* 1992, **9**: 187–200.

[2] Bari A, Rabinowitz P H. Periodic solutions of Hamiltonian systems of 3-body type. *Ann IHP Analyse Nonlinéaire,* 1991, **8**: 561–649.

[3] Bessi U, Coti Zelati V. Symmetries and non-collision closed orbits for planar N-body type problems. *J Nonlinear Anal T M A,* 1991, **16**: 587–598.

[4] Coti Zelati V. A class of periodic solutions of the N-body problems. *Celestial Mech,* 1989, **46**: 177–186.

[5] Coti Zelati V. The periodic solutions of n-body type problems. *Ann IHP Analyse Nonlinéaire,* 1990, **7**: 477–492.

[6] Fadell E, Husseini S. Infinite cuplength in free loop spaces with an application to a problem of the N-body type. *Ann. IHP Analyse Nonlinéarie,* 1992, **9**: 305–319.

[7] Gordon WC. Conservative dynamical systems involving strong forces. *Trans Amer Math Soc,* 1975, **204**: 113–135.

[8] Van Groesen E W C. Analytical min-max methods for Hamiltonian break orbits of prescribed energy. *J Math Anal Appl,* 1988, **132**: 1–12.

[9] Majer P, Terracini S. Periodic solutions to some n-body type problems. 1992, Preprint.

[10] Rabinowitz P H. Min-max methods in critical point theory with applications to differential equations. C B M S Reg Conf Ser in Math, Vol 65, Amer Math Soc, 1986.

[11] Serra E, Terracini S. Noncollision solutions to some three-body problems. *Arch Rational Mech Anal,* 1992, **120**: 305–325.

[12] Serra E, Terracini S. Noncollision solutions to some singular minimization problems with Keplerian-like potentials. *Nonlinear Analysis T M A,* 1994, **22**: 45–62.
[13] Siegel C L, Moser J K. Lectures on Celestial Mechanics. Springer-Verlag, 1971.

The Existence of Multiple Geometrically Distinct Preiodic Orbits with Prescribed Energy for N-Body-Type Problems

Zhang Shiqing
(*Department of Applied Mathematics, Chongqing University, Chongqing* 630044*, China*)

Abstract: Using the equivariant Ljusternik-Schnirelmann theory, we prove that there are at least $2\cdot(N-2)\cdot 2^{N-3}$ geometrically distinct noncollision orbits with prescribed energy for a class of planar N-body-type problems.

Keywords: N-body-type problems, geometrically distinct periodic orbits, equivariant Ljusternik-Schnirelmann theory