第30卷 第4期　　数 学 学 报　　Vol. 30, No. 4
1987年7月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　July, 1987

积域上帐篷空间的实内插*

龙 瑞 麟
(中国科学院数学研究所)†

文[1]对单参数情形的帐篷空间进行了比较系统的讨论，然而对其实内插空间的讨论却仍嫌不够．通常地，实内插空间的讨论要求指标范围尽可能地大，同时也希望能得到K-泛函的明显表示或精确估计．现在我们便按此要求来讨论乘积空间上的帐篷空间T^p_q的实内插空间．单参数情形的指标范围我们可以使它达到令人满意的程度，即

$$0 < p_0 < p_1 \leqslant \infty,\ 1 \leqslant q \leqslant \infty,$$

同时也得到了K-泛函的模等价意义下的明显表示．多参数情形除了p_1的范围稍差一些(即$p_1 < \infty$)以外，其他同单参数一样．虽然单参数情形叙述要简单，但我们的叙述仍以多参数为主．

考虑乘积空间$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$及其半空间$\mathbb{R}^{n+1}_+ \times \mathbb{R}^{m+1}_+$．对

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) > 0$$

(即$\alpha_i > 0$)，如通常那样记

$$\begin{aligned}\Gamma^{(\alpha)}(x) &= \Gamma^{(\alpha_1)}(x_1) \times \Gamma^{(\alpha_2)}(x_2)\\ &= \{(y, t) = (y_1, t_1, y_2, t_2).\ |x_i - y_i| < \alpha_i t_i,\ i = 1, 2\}\end{aligned}$$

为开口α的开锥，简记$\Gamma(x) = \Gamma^{(1)}(x)$．对开集$O \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$，记$F = {}^cO$($O$的补集)，并令

$$\hat{O} = {}^c\mathscr{R}(F) = {}^c\Big(\bigcup_{x \in F} \Gamma(x)\Big). \tag{1}$$

它称为O的对应于开口$\alpha = 1$的帐篷．当然也可对任意开口定义帐篷．帐篷有如下等价定义．

命题1 设$O \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$为开集．则

$$\hat{O} = \{(y, t):\ B(y, t) = B_1(y_1, t_1) \times B_2(y_2, t_2) \subset O\}, \tag{2}$$

以及

$$\hat{O} = \bigcup_{B_1 \times B_2 \subset O} \widehat{B_1 \times B_2} = \bigcup_{B_1 \times B_2 \subset O} \hat{B}_1 \times \hat{B}_2, \tag{3}$$

其中$B_i(y_i, t_i)$分别表示$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$内以y_i为心，t_i为半径的球，而$B(y, t)$则表示积球．

证 (2)的证明只用到如下初等事实

$$(y, t) \in \Gamma(x) \Longleftrightarrow x \in B(y, t).$$

---

* 1986年2月5月收到．
† 本文受国家自然科学基金资助．

现证(3). 显然有 $\bigcup_{B_1\times B_2\subset O}\widehat{B_1\times B_2}\subset\hat{O}$. 现设 $(y,t)\in\hat{O}$, 则由式(2)知有 $B(y,t)\subset O$. 既然 (y,t) 使 $B(y,t)\subset B(y,t)$, 故 $(y,t)\in\hat{B}(y,t)$. 这说明

$$\hat{O}\subset\bigcup_{B_1\times B_2\subset O}\widehat{B_1\times B_2}.$$

至于式(3)中的第二个等式是因

$$\begin{aligned}\widehat{B_1\times B_2}&=\{(y,t):B(y,t)\subset B_1\times B_2\}=\{(y,t):B_i(y_i,t_i)\subset B_i,\ i=1,2\}\\&=\hat{B}_1\times\hat{B}_2.\end{aligned}$$

这证完了命题.

现设 $\Phi(y,t)$ 是乘积半空间上任意非负可测函数, $F\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ 是任意闭集. 我们跟着文[1]在单参数情形所作的那样,要比较如下两个积分

$$\int_F\int_{\Gamma(x)}\Phi(y,t)dydtdx \text{ 与 } \int_{\mathscr{R}(F)}\Phi(y,t)t_1^nt_2^mdydt.$$

这个思想将在下面我们建立讨论实内插问题所需的关键引理中有用.

引理 1　设 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)>0$, 闭集 F 与 $\Phi(y,t)$ 任意给定. 则存在仅依赖于 α 与维数的常数 C_α 使

$$\int_F\int_{\Gamma^{(\alpha)}(x)}\Phi(y,t)dydtdx\leqslant C_\alpha\iint_{\mathscr{R}^{(\alpha)}(F)}\Phi(y,t)t_1^nt_2^mdydt.\tag{4}$$

同时存在充分接近于 1 的常数 γ 以及常数 $C_{\alpha,\gamma}$ 使

$$\int_{\mathscr{R}^{(\alpha)}(F^*)}\Phi(y,t)t_1^nt_2^mdydt\leqslant C_{\alpha,\gamma}\int_F\int_{\Gamma(x)}\Phi(y,t)dydtdx,\tag{5}$$

其中 F^* 为 F 的如下缩小: 记 $O={}^cF$, M_s 为 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ 上定义的强极大算子, γ 充分接近于 1, 令

$$F^*={}^cO^*,\ \text{其中 } O^*=\{x:M_s(\chi_0)>1-\gamma\},$$

其中 χ_0 表示 O 的特征函数.

证　式(4)的证明是直接的. 这因若记 χ_1, χ_2 分别为 $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ 中单位球的特征函数, 则式(4)左边为

$$\int_{\mathscr{R}^{(\alpha)}(F)}\Phi(y,t)\int_F\chi_1\left(\frac{x_1-y_1}{\alpha_1t_1}\right)\chi_2\left(\frac{x_2-y_2}{\alpha_2t_2}\right)dxdydt\leqslant C_\alpha\int_{\mathscr{R}^{(\alpha)}(F)}\Phi(y,t)t_1^nt_2^mdydt.$$

现证式(5). 其右边(模常数倍)为

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}\times\mathbb{R}_+^{m+1}}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m}\Phi(y,t)\chi_F(x)\chi_1\left(\frac{x_1-y_1}{t_1}\right)\chi_2\left(\frac{x_2-y_2}{t_2}\right)dxdydt\\&\geqslant\int_{\mathscr{R}^{(\alpha)}(F^*)}\Phi(y,t)\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m}\chi_F(x)\chi_1\left(\frac{x_1-y_1}{t_1}\right)\chi_2\left(\frac{x_2-y_2}{t_2}\right)dxdydt.\end{aligned}$$

注意当 $(y,t)\in\mathscr{R}^{(\alpha)}(F^*)$, $\exists\,\bar{x}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\in F^*$ 使 $(y,t)\in\Gamma^{(\alpha)}(\bar{x})$, 即

$$|y_i-\bar{x}_i|<\alpha_it_i,\quad i=1,2.$$

再注意 $\exists\,C_\alpha<1$ 使

$$|B(\bar{x},\alpha t)-B(y,t)|\leqslant C_\alpha|B(\bar{x},\alpha t)|,\quad\forall\bar{x},\forall t,\forall y\in B(\bar{x},\alpha t),$$

以及有 $\left(\text{注意 } M_s(\chi_0)(\bar{x})=\sup_{B\ni\bar{x}}\dfrac{|O\cap B|}{|B|}\leqslant1-\gamma\right)$

$$|F\cap B(y,t)|+|B(\bar{x},\alpha t)-B(y,t)|\geqslant|F\cap B(\bar{x},\alpha t)|\geqslant\gamma|B(\bar{x},\alpha t)|,$$

故得

$$|F\cap B(y,t)|\geqslant(\gamma-C_\alpha)|B(\bar{x},\alpha t)|=C_{\alpha,\gamma}t_1^nt_2^m. \tag{6}$$

此即

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m}\chi_F(x)\chi_1\left(\frac{x_1-y_1}{t_1}\right)\chi_2\left(\frac{x_2-y_2}{t_2}\right)dx=|F\cap B(y,t)|\geqslant C_{\alpha,\gamma}t_1^nt_2^m,$$

$\forall(y,t)\in\mathscr{R}^{(\alpha)}(F^*)$.

这完成了式 (5) 的证明. 引理证毕.

注 式 (6) 特别说明 $\forall(y,t)\in\mathscr{R}^{(\alpha)}(F^*)$, $\exists x\in F$ 使 $(y,t)\in\Gamma(x)$, 这说明

$$\mathscr{R}^{(\alpha)}(F^*)\subset\mathscr{R}(F).$$

注意此处 α 是任意给定的, γ 是充分接近于 1 的适当常数, F^* 是对应这个 γ 而定义的 F 的缩小.

现对 $0<p\leqslant\infty$, $1\leqslant q\leqslant\infty$ 来定义帐篷空间 T_q^p.

定义 1 Borel 可测函数 f 称为属于 T_q^p, 如果

$$f^*(x)=\text{ess}\cdot\sup\{|f(y,t)|:(y,t)\in\Gamma(x)\}\in L^p,\ q=\infty,\ \|f\|_{T_\infty^p}=\|f^*\|_p, \tag{7}$$

$$A_q(f)(x)=\left(\int_{\Gamma(x)}\frac{|f|^q}{t_1^{n+1}t_2^{m+1}}dydt\right)^{\frac{1}{q}}\in L^p,\ 1\leqslant q<\infty,\ \|f\|_{T_q^p}=\|A_q(f)\|_p. \tag{8}$$

注 我们分别对 $q=\infty$ 情形与 $p=\infty$ 作点附注. 我们定义 T_∞^p 由 Borel 可测函数而不只是由连续函数构成,这似乎是合理的. 我们可以如同在文 [2] 讨论单参数情形的空间 T_∞^p 一样得到多参数时的 T_∞^p 的如文 [2] 中列举的所有结果, 只是原子分解要采用以开集为支柱的原子概念. 本文对 T_∞^p 只叙述有关实内插的结果, 其他从略. 关于空间 T_q^∞, 文 [1] 已经指出即使在单参数情形, T_q^∞ 的定义也是依赖于锥的开口 α 的选取的. 但在单参数情形的实内插问题中,这个不确定性并不妨碍 T_q^∞ 的价值. 也就是说, 在单参数的实内插问题中,我们可以把对任何开口 α 定义的 T_q^∞ 作为一个端点空间,从而使对单参数的 T_q^p 的实内插得到满意而方便的解决,见本文最后.

实内插所需的一个关键事实是如下引理. 这个引理同时也说明 T_q^p 当 $p<\infty$ 时的定义是不依赖于锥的开口的选取的. 这个引理在文 [1] 的单参数情形并没有完整叙述,仅有相当于 $q=p_1$ 时的不等式.

引理 2 设 $1\leqslant q\leqslant p_1<\infty$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)>0$, $F\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ 是任意闭集, F^* 是如引理 1 中定义的 F 的缩小. 则存在常数 $C=C_{\alpha,\gamma,q,p_1}$ 使

$$\int_{F^*}A_q^{(\alpha)}(f)^{p_1}dx\leqslant\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m}A_q^{(\alpha)}(f\chi_{\mathscr{R}^{(\alpha)}(F^*)})^{p_1}dx\leqslant C\int_F A_q(f)^{p_1}dx,\ \forall f. \tag{9}$$

证 只有第二个不等式需要证明. 对给定的 f, 记 $f_1=f\chi_{\mathscr{R}^{(\alpha)}(F^*)}$, 并记 r 为 $\frac{p_1}{q}$的相伴数. $r=\infty$ 是平凡的. 故可设 $1<r<\infty$. 我们有

$$\left(\int A_q^{(\alpha)}(f_1)^{p_1}dx\right)^{\frac{q}{p_1}}=\left(\int A_q^{(\alpha)}(f_1)^{\frac{qp_1}{q}}dx\right)^{\frac{q}{p_1}}=\sup_{\varphi:\|\varphi\|_r\leqslant1}\int A_q^{(\alpha)}(f_1)^q\varphi dx.$$

利用式 (5) 有

$$\int A_q^{(\alpha)}(f_1)^q\varphi dx=\int_{\mathscr{R}^n\times\mathscr{R}^m}\int_{\Gamma^{(\alpha)}(x)}|f_1|^q\frac{dydt}{t_1^{n+1}t_2^{m+1}}\varphi(x)dx$$
$$=\int_{\mathscr{R}^{(\alpha)}(F^*)}\frac{1}{t_1^nt_2^m}\int_{\mathscr{R}^n\times\mathscr{R}^m}\chi_1\left(\frac{x_1-y_1}{\alpha_1t_1}\right)\chi_2\left(\frac{x_2-y_2}{\alpha_2t_2}\right)\varphi(x)dx|f|^q\frac{dydt}{t}$$
$$=\int_{\mathscr{R}^{(\alpha)}(F^*)}|f|^qm_t\varphi(y)\frac{dydt}{t}\leqslant C\int_F\int_{\Gamma(x)}|f|^qm_t\varphi(y)\frac{dydt}{t_1^{n+1}t_2^{m+1}}dx. \tag{10}$$

由强极大算子 M_s 的定义

$$M_s\varphi(x)=\sup_{B_1\times B_2\ni x}\frac{1}{|B_1\times B_2|}\int_{B_1\times B_2}|\varphi(z)|dz,$$

我们有

$$\sup_{(y,t)\in\Gamma(x)}|m_t\varphi(y)|=\sup_{(y,t)\in\Gamma(x)}\left|\frac{1}{t_1^nt_2^m}\int_{\substack{|z_i-y_i|<\alpha_it_i\\ i=1,2}}\varphi(z)dz\right|\leqslant CM_s\varphi(x).$$

这样我们得到

$$\left(\int A_q^{(\alpha)}(f_1)^pdx\right)^{\frac{q}{p_1}}\leqslant C\sup_{\varphi}\int_F\int_{\Gamma(x)}\frac{|f|^qdydt}{t_1^{n+1}t_2^{m+1}}M_s\varphi(x)dx$$
$$=C\sup_{\varphi}\int_FA_q(f)^qM_s\varphi dx\leqslant C\left(\int_FA_q(f)^{p_1}dx\right)^{\frac{q}{p_1}}.$$

这完成了式 (9) 的证明．引理证毕．

命题 2　设 $0<p<\infty$，$1\leqslant q\leqslant\infty$，则 T_q^p 的定义与锥的开口 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ 无关．

证　由对称性,充分地只需证明

$$\|f^{*(\alpha)}\|_p\leqslant C\|f^*\|_p,\ \|A_q^{(\alpha)}(f)\|_p\leqslant C\|A_q(f)\|_p.$$

先看 $q=\infty$ 情形．对 $\lambda>0$，记 $O=\{f^*>\lambda\}$．显然地在模零测集意义下有

$$\{|f|>\lambda\}\subset\hat{O}$$

(否则将有 $x\in F={}^cO$ 使 $\{|f|>\lambda\}\cap\Gamma(x)$ 有正测度，从而 $f^*(x)>\lambda$ 与 $x\in F$ 矛盾)．由引理 1 后的注知,对给定的 α，适当扩大的 O^* 使得 $F^*={}^cO^*$ 满足 $\mathscr{R}^{(\alpha)}(F^*)\subset\mathscr{R}(F)$．这说明 $\forall x\in F^*$，有

$$f^{*(\alpha)}(x)\leqslant\|f\chi_{\mathscr{R}^{(\alpha)}(F^*)}\|_\infty\leqslant\|f\chi_{\mathscr{R}(F)}\|_\infty\leqslant\lambda.$$

这说明 $\{f^{*(\alpha)}>\lambda\}\subset O^*$，从而

$$|\{f^{*(\alpha)}>\lambda\}|\leqslant C|\{f^*>\lambda\}|.$$

这完成了 $q=\infty$，$0<p<\infty$ 时断言的证明．　$q=p=\infty$ 时的断言也是对的，这由 $T_\infty^\infty=L^\infty$ 而知．总之，$q=\infty$ 的断言获证．

现看 $q<\infty$ 情形．对给定的 $0<p<\infty$，找 $p_1>\max(p,q)$．由式 (9) 知对任意闭集 F 有

$$\int_{F^*}A_q^{(\alpha)}(f)^{p_1}dx\leqslant C\int_FA_q(f)^{p_1}dx,$$

现特别对给定的 $\lambda>0$ 取 $F={}^cO$，$O=\{A_q(f)>\lambda\}$．则有

$$|\{A_q^{(\alpha)}(f)>\lambda\}|\leqslant|O^*|+|\{x\in F^*,A_q^{(\alpha)}(f)>\lambda\}|$$
$$\leqslant C|\{A_q(f)>\lambda\}|+\frac{C}{\lambda^{p_1}}\int_{\{A_q(f)\leqslant\lambda\}}A_q(f)^{p_1}dx.$$

既然 $p < p_1$，由此即可推出

$$\|A_q^{(\alpha)}(f)\|_p \leqslant C\|A_q(f)\|_p.$$

这完成了定理的证明.

现在开始讨论 T_q^p 的实内插空间.

先讨论 $q = \infty$ 情形. 改记非切向极大算子为 N，而记 $*$ 为可测函数的非增重排算子.

定义 2 设 $1 \leqslant q \leqslant \infty$，$0 < p < \infty$，$0 < r \leqslant \infty$. 记

$$T_\infty^{p,r} = \{f\colon Nf \in L^{p,r}\}, \tag{11}$$

$$T_q^{p,r} = \{f\colon A_q(f) \in L^{p,r}\},\ 1 \leqslant q < \infty. \tag{11'}$$

其中 $L^{p,r}$ 是 Lorentz 空间.

引理 3 设 $0 < p < \infty$，我们有

$$K(t, f, T_\infty^p, T_\infty^\infty) \sim \left(\int_0^{t^p} (Nf)^{*p}(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{p}},\ \forall f \in T_\infty^p + T_\infty^\infty,\ \forall t > 0. \tag{12}$$

证 设 $f \in T_\infty^p + T_\infty^\infty$，$f = f_0 + f_1$ 是其任意分解. 则

$$Nf \leqslant Nf_0 + Nf_1,\ (Nf)^*(t) \leqslant (Nf_0)^*(t) + \|Nf_1\|_\infty,$$

$$\int_0^{t^p} (Nf)^{*p}(\tau)d\tau \leqslant C_p\left(\int_0^{t^p} (Nf_0)^*(\tau)d\tau + t^p\|Nf_1\|_\infty^p\right)$$

$$\leqslant C_p(\|f_0\|_{T_\infty^p}^p + t^p\|f_1\|_{T_\infty^\infty}^p).$$

对所有可能的分解取 inf，即得

$$\left(\int_0^{t^p} (Nf)^{*p}(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant CK(t, f, T_\infty^p, T_\infty^\infty).$$

设 $f \in T_\infty^p + T_\infty^\infty$，$t > 0$. 若 $(Nf)^*(t^p) = 0$，则因

$$\left(\int_0^{t^p} (Nf)^{*p}(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{T_\infty^p},$$

故式 (12) 中的另一半不等式此时是显然的. 现设 $(Nf)^*(t^p) > 0$. 令

$$O = \{Nf > (Nf)^*(t^p)\},\ F = {}^cO.$$

则

$$\|f\chi_{\mathscr{R}(F)}\|_\infty \leqslant (Nf)^*(t^p).$$

令 $f_0 = f\chi_{\hat{O}}$，$f_1 = f\chi_{\mathscr{R}(F)}$. 则 $f = f_0 + f_1$ 是 f 在 $T_\infty^p + T_\infty^\infty$ 中的分解，且

$$\operatorname{supp} Nf_0 \subset O,\ |O| \leqslant t^p,\ \|f_1\|_{T_\infty^\infty} \leqslant (Nf)^*(t^p).$$

故得

$$\|f_0\|_{T_\infty^p}^p + t^p\|f_1\|_{T_\infty^\infty}^p \leqslant \int_0^{t^p} (Nf_0)^{*p}(\tau)d\tau + t^p(Nf)^{*p}(t^p) \leqslant 2\int_0^{t^p} (Nf)^{*p}(\tau)d\tau.$$

这完成了引理的证明.

定理 1 设 $0 < p_0 < p_1 \leqslant \infty$，$0 < \theta < 1$，$0 < r \leqslant \infty$，$\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$. 则

$$(T_\infty^{p_0}, T_\infty^{p_1})_{\theta,r} = T_\infty^{p,r}.$$

证明从略. 它是引理 3 与内插的稳定性定理的直接结果.

现看 $q<\infty$ 情形.

引理 4　设 $0<p_0<p_1<\infty$，$1\leqslant q\leqslant p_1$，$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}$. 则

$$K(t,f,T_q^{p_0},T_q^{p_1})\sim\left(\int_0^{ct^\alpha}A_q(f)^{*p_0}(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{p_0}}+t\left(\int_{ct^\alpha}^{\infty}A_q(f)^{*p_1}(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{p_1}}.\tag{13}$$

证　设 $f\in T_q^{p_0}+T_q^{p_1}$，$f=f_0+f_1$ 是其任一分解. 则

$$A_q(f)\leqslant A_q(f_0)+A_q(f_1),$$

$$A_q(f)^*(t)\leqslant A_q(f_0)^*\left(\frac{t}{2}\right)+A_q(f_1)^*\left(\frac{t}{2}\right).$$

这样,有

$$\left(\int_0^{ct^\alpha}A_q(f)^{*p_0}(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{p_0}}\leqslant C\left(\int_0^{ct^\alpha}A_q(f_0)^{*p_0}(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{p_0}}+C\left(\int_0^{ct^\alpha}A_q(f_1)^{*p_0}(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{p_0}}$$
$$=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2,$$

$$t\left(\int_{ct^\alpha}^{\infty}A_q(f)^{*p_1}(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{p_1}}\leqslant ct\left(\int_{ct^\alpha}^{\infty}A_q(f_0)^{*p_1}(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{p_1}}+ct\left(\int_{ct^\alpha}^{\infty}A_q(f_1)^{*p_1}(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{p_1}}$$
$$=\mathrm{I}_3+\mathrm{I}_4,$$

$$\mathrm{I}_1\leqslant C\|f_0\|_{T_q^{p_0}},\quad \mathrm{I}_4\leqslant ct\|f_1\|_{T_q^{p_1}}.$$

对 I_2, I_3 的估计,我们有

$$\mathrm{I}_2\leqslant C\left(\int_0^{ct^\alpha}A_q(f_1)^{*p_1}(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{p_1}}t^{\frac{\alpha}{p_0}\left(1-\frac{p_0}{p_1}\right)}\leqslant ct\|f_1\|_{T_q^{p_1}},$$

$$\mathrm{I}_3\leqslant ct[A_q(f_0)^*(ct^\alpha)]^{\frac{p_1-p_0}{p_1}}\left(\int_{ct^\alpha}^{\infty}A_q(f_0)^{*p_0}(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{p_1}}$$
$$\leqslant C[(ct^\alpha)^{\frac{1}{p_0}}A_q(f_0)^*(ct^\alpha)]^{\frac{p_1-p_0}{p_1}}\|f_0\|_{T_q^{p_0}}^{\frac{p_0}{p_1}}\leqslant C\|f_0\|_{T_q^{p_0}}.$$

这完成了式 (13) 的右边被左边控制的证明,并且其证明并没有用到 $q\leqslant p_1$ 的限制.

现设 $f\in T_q^{p_0}+T_q^{p_1}$，$t>0$. $A_q(f)^*(t^\alpha)=0$ 情形是平凡的. 故可令

$$O=\{A_q(f)(x)>A_q(f)^*(t^\alpha)\}.$$

如同引理 1 中对锥的开口为 $\alpha=1$ 情形定义 O^* 与 F^*. 令

$$f=f\chi_{\hat{O}^*}+f\chi_{\mathscr{R}(F^*)}=f_0+f_1.$$

则

$$\operatorname{supp}A_q(f_0)\subset O^*,\quad |O^*|\leqslant C|O|\leqslant ct^\alpha,$$

$$\|f_0\|_{T_q^{p_0}}=\left(\int A_q(f_0)^{p_0}dx\right)^{\frac{1}{p_0}}\leqslant\left(\int_0^{ct^\alpha}A_q(f)^{*p_0}(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{p_0}}.$$

同时由引理 2, 并注意到 $A_q(f)^*(\tau)$ 在区间 $(|O|,t^\alpha)$ 上取常数值 $A_q(f)^*(t^\alpha)$ 的事实，我们得

$$t\|f_1\|_{T_q^{p_1}}=t\left(\int A_q(f_1)^{p_1}dx\right)^{\frac{1}{p_1}}\leqslant ct\left(\int_F A_q(f)^{p_1}dx\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$= ct\left(\int_{|0|}^{t^\alpha} + \int_{t^\alpha}^{\infty} A_q(f)^{*p_1}(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\leqslant ct^{1+\frac{\alpha}{p_1}} A_q(f)^*(t^\alpha) + ct\left(\int_{t^\alpha}^{\infty} A_q(f)^{*p_1}(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\leqslant C\left(\int_0^{t^\alpha} A_q(f)^{*p_0}(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{p_0}} + ct\left(\int_{t^\alpha}^{\infty} A_q(f)^{*p_1}(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{p_1}}.$$

这完成了式 (13) 的左边可以被右边控制的证明. 这证明了引理.

为了由引理 4 推出 $q<\infty$ 时 T_q^p 的实内插定理,需要如下 Hardy 不等式.

引理 5 (Hardy) 设 $\alpha, \beta>0$, $f \geqslant 0$, 当 $\alpha<1$ 时还要求 f 是 $(0,\infty)$ 上单调 (或单增或单降)函数. 则

$$\int_0^\infty\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)^\alpha t^{-\beta-1}dt \leqslant C_{\alpha,\beta}\int_0^\infty f(t)^\alpha t^{\alpha-\beta-1}dt, \tag{14}$$

$$\int_0^\infty\left(\int_t^\infty f(\tau)d\tau\right)^\alpha t^{\beta-1}dt \leqslant C_{\alpha,\beta}\int_0^\infty f(t)^\alpha t^{\alpha+\beta-1}dt. \tag{15}$$

证 当 $\alpha \geqslant 1$ 时就是原来的 Hardy 不等式. 当 $\alpha<1$ 但 $f(\tau)$ 单调时不等式仍然成立也是一个已知的事实. 为完全起见仍给出证明. 现看 (14). 当 f 单调增加时显然. 设 f 单调下降令 $F(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau$. 则 $F(t) \geqslant tf(t)$, 且当 (14) 右边有限时,有

$$\lim_{t\to 0} F^\alpha(t)t^{-\beta}=0.$$

这因

$$t^{-\beta+\alpha}f(t)^\alpha \leqslant C\int_{\frac{t}{2}}^t \tau^{\alpha-\beta-1}f(\tau)^\alpha d\tau=o(1),$$

$$f(t)=0(t^{\frac{\beta}{\alpha}-1}), \quad F(t)=o(t^{\frac{\beta}{\alpha}}).$$

这样,

$$\int_0^\infty\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)^\alpha t^{-\beta-1}dt=-\frac{1}{\beta}t^{-\beta}F(t)^\alpha\Big|_0^\infty+\frac{\alpha}{\beta}\int_0^\infty t^{-\beta}F(t)^{\alpha-1}f(t)dt$$

$$\leqslant \frac{\alpha}{\beta}\int_0^\infty t^{\alpha-\beta-1}f(t)^\alpha dt.$$

现证式 (15). 有(无妨设 f 下降)

$$\int_0^\infty\left(\int_t^\infty f(\tau)d\tau\right)^\alpha t^{\beta-1}dt=\int_0^\infty\left(\sum_{k\geqslant 0}\int_{2^k t}^{2^{k+1}t} f(\tau)d\tau\right)^\alpha t^{\beta-1}dt$$

$$\leqslant C\int_0^\infty \sum_{k\geqslant 0}(2^k t f(2^k t))^\alpha t^{\beta-1}dt$$

$$=C\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{2^{k\beta}}\int_0^\infty (2^k t)^{\alpha+\beta}f(2^k t)^\alpha \frac{dt}{t}=C\int_0^\infty f(t)^\alpha t^{\alpha+\beta-1}dt.$$

这证完了引理.

引理 6 设 $0<p_0<p_1<\infty$, $0<r\leqslant\infty$, $0<\theta<1$, $\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}$. 设 $h(t)$ 是 $(0,\infty)$ 上非负下降函数,

$$E(t,h)=E_{p_0,p_1}(t,h)=\left(\int_0^{ct^\alpha}h(\tau)^{p_0}d\tau\right)^{\frac{1}{p_0}}+t\left(\int_{ct^\alpha}^\infty h(\tau)^{p_1}d\tau\right)^{\frac{1}{p_1}},\ \frac{1}{\alpha}=\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}.$$

则

$$\left(\int_0^\infty (t^{-\theta}E(t,h))^r\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}}\sim\left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}}h(t))^r\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{16}$$

证 先看 $r=\infty$ 情形．有

$$t^{-\theta}\left(\int_0^{ct^\alpha}h(\tau)^{p_0}d\tau\right)^{\frac{1}{p_0}}\leqslant\sup\{t^{\frac{1}{p}}h(t)\}t^{-\theta}\left(\int_0^{ct^\alpha}\tau^{-\frac{p_0}{p}}d\tau\right)^{\frac{1}{p_0}}\leqslant C\sup\{t^{\frac{1}{p}}h(t)\},$$

$$t^{1-\theta}\left(\int_{ct^\alpha}^\infty h(\tau)^{p_1}d\tau\right)^{\frac{1}{p_1}}\leqslant\sup\{t^{\frac{1}{p}}h(t)\}t^{1-\theta}\left(\int_{ct^\alpha}^\infty\tau^{-\frac{p_1}{p}}d\tau\right)^{\frac{1}{p_1}}\leqslant C\sup\{t^{\frac{1}{p}}h(t)\}.$$

上面的推导中用到了如下等式

$$-\theta+\alpha\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}\right)=0=1-\theta+\alpha\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}\right). \tag{17}$$

这证明了

$$\sup_{t>0}t^{-\theta}E(t,h)\leqslant C\sup_{t>0}t^{\frac{1}{p}}h(t).$$

反向不等式是因

$$t^{\frac{\alpha}{p}}h(ct^\alpha)\leqslant ct^{\frac{\alpha}{p}-\frac{\alpha}{p_0}}\left(\int_0^{ct^\alpha}h(\tau)^{p_0}d\tau\right)^{\frac{1}{p_0}}\leqslant ct^{-\theta}E(t,h). \tag{18}$$

这证明了 $r=\infty$ 时的断言．

现看 $r<\infty$ 情形．由引理 5 有

$$\begin{aligned}\left(\int_0^\infty (t^{-\theta}E(t,h))^r\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}}&\leqslant C\left(\int_0^\infty t^{-\theta r}\left(\int_0^{ct^\alpha}h(\tau)^{p_0}d\tau\right)^{\frac{r}{p_0}}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}}\\&\quad+C\left(\int_0^\infty t^{(1-\theta)r}\left(\int_{ct^\alpha}^\infty h(\tau)^{p_1}d\tau\right)^{\frac{r}{p_1}}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}}\\&=C\left(\int_0^\infty t^{-\frac{\theta r}{\alpha}}\left(\int_0^t h(\tau)^{p_0}d\tau\right)^{\frac{r}{p_0}}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}}+C\left(\int_0^\infty t^{\frac{(1-\theta)r}{\alpha}}\left(\int_t^\infty h(\tau)^{p_1}d\tau\right)^{\frac{r}{p_1}}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}}\\&\leqslant C\left(\int_0^\infty\left(t^{-\frac{\theta}{\alpha}+\frac{1}{p_0}}h(t)\right)^r\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}}+C\left(\int_0^\infty\left(t^{\frac{1-\theta}{\alpha}+\frac{1}{p_1}}h(t)\right)^r\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}}\\&=C\left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}}h(t))^r\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}}.\end{aligned}$$

反向不等式仍由式 (18) 得出．引理获证．

现在我们可以得到 $q<\infty$ 时 T_q^p 的实内插的如下结果．

定理 2 设 $0<p_0<p_1<\infty$，$1\leqslant q<\infty$，$0<\theta<1$，$0<r\leqslant\infty$．则

$$(T_q^{p_0},T_q^{p_1})_{\theta,r}=T_q^{p,r},\ \frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}.$$

证 先考虑 $p_1\leqslant q$ 情形．由引理 4 有

$$K(t,f,T_q^{p_0},T_q^q)\sim E_{p_0,q}(t,A_q(f)^*).$$

由引理 6 知对 $\tilde{\theta}, \tilde{p}$, 其中 $0<\tilde{\theta}<1$, $\frac{1}{\tilde{p}}=\frac{1-\tilde{\theta}}{p_0}+\frac{\tilde{\theta}}{q}$, 有

$$\left(\int_0^\infty (t^{-\tilde{\theta}}K(t,f,T_q^{p_0},T_q^q))^r\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}}\sim\left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{\tilde{p}}}A_q(f)^*(t))^r\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

这说明

$$(T_q^{p_0}, T_q^q)_{\tilde{\theta},r}=T_q^{\tilde{p},r}.$$

特别,若记 δ 为使 $\frac{1}{p_1}=\frac{1-\delta}{p_0}+\frac{\delta}{q}$ 的数,则

$$T_q^{p_1}=T_q^{p_1,p_1}=(T_q^{p_0}, T_q^q)_{\delta,p_1}.$$

这样,由实内插的稳定性定理(见 Halmstedt[3] (3.16))得

$$(T_q^{p_0}, T_q^{p_1})_{\theta,r}=(T_q^{p_0}, T_q^q)_{\tilde{\theta},r}=T_q^{\tilde{p},r},$$

其中 $\tilde{\theta}, \tilde{p}$ 满足

$$\tilde{\theta}=\theta\delta,\ \frac{1}{\tilde{p}}=\frac{1-\tilde{\theta}}{p_0}+\frac{\tilde{\theta}}{q}.$$

这样的 $\tilde{\theta}$ 的确使 $p=\tilde{p}$. 事实上这因

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}&=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}=\frac{1}{\delta}\left(\frac{\delta-\tilde{\theta}}{p_0}+\frac{\tilde{\theta}}{p_1}\right)\\&=\frac{1}{\delta}\left(\frac{\delta-\tilde{\theta}}{p_0}+\frac{(1-\delta)\tilde{\theta}}{p_0}+\frac{\delta\tilde{\theta}}{q}\right)=\frac{1-\tilde{\theta}}{p_0}+\frac{\tilde{\theta}}{q}=\frac{1}{\tilde{p}}.\end{aligned}$$

这证明了当 $p_1\leqslant q$ 时

$$(T_q^{p_0}, T_q^{p_1})_{\theta,r}=T_q^{p,r},\ \frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}. \tag{19}$$

至于 $p_1>q$ 时式 (19) 也成立,这是引理 4, 引理 6 的直接结果. 定理证明完毕。

注 其实式 (13) 对 $0<p_0<p_1<\infty$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, 都是成立的, 无需 $p_1\geqslant q$. 只是要得到 $p_1<q$ 时的 $K(t,f,T_q^{p_0},T_q^{p_1})$ 要用到文 [3] 的如下结果: 若 $E_1=(A_0,A_1)_{\theta_1,q_1}$, 则

$$K(t,f,A_0,E_1)\sim t\left(\int_{t^{\frac{1}{\theta_1}}}^\infty(\tau^{-\theta_1}K(\tau,f,A_0,A_1))^{q_1}\frac{d\tau}{\tau}\right)^{\frac{1}{q_1}}. \tag{13)'$$

现设 $0<p_0<p_1<q<\infty$, $A_0=T_q^{p_0}$, $A_1=T_q^q$, $E_1=T_q^{p_1}$, 我们要指出 (13)′ 与 (13) 是一致的。我们已指出不管 p_1, q 如何,总有

$$\begin{aligned}E_{p_0,p_1}(t,A_q(f)^*(t))&=\left(\int_0^{ct^\alpha}A_q(f)^{*p_0}d\tau\right)^{\frac{1}{p_0}}+t\left(\int_{ct^\alpha}^\infty A_q(f)^{*p_1}d\tau\right)^{\frac{1}{p_1}}\\&\leqslant CK(t,f,T_q^{p_0},T_q^{p_1}),\end{aligned}$$

现剩下证明反向不等式。注意我们已经得到 $E_1=(A_0,A_1)_{\delta,p_1}$, δ 满足

$$\frac{1}{p_1}=\frac{1-\delta}{p_0}+\frac{\delta}{q}.$$

因此式 (13)′ 中的 θ_1, q_1 分别是 δ, p_1. 此外,我们还得到

$$K(t,f,T_q^{p_0},T_q^q)\sim\left(\int_0^{ct^\beta}A_q(f)^{*p_0}(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{p_0}}+t\left(\int_{ct^\beta}^\infty A_q(f)^{*q}(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\frac{1}{\beta}=\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q}.$$

将它代入式 (13)′ 的右边得

$$K(t,f,T_q^{p_0},T_q^{p_1})\sim t\left(\int_{t^{\frac{1}{\delta}}}^{\infty}s^{-\delta p_1}\left(\int_0^{cs^\beta}A_q(f)^{*p_0}(\tau)d\tau\right)^{\frac{p_1}{p_0}}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$+t\left(\int_{t^{\frac{1}{\delta}}}^{\infty}s^{(1-\delta)p_1}\left(\int_{cs^\beta}^{\infty}A_q(f)^{*q}(\tau)d\tau\right)^{\frac{p_1}{q}}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{p_1}}=\mathrm{I}+\mathrm{II}.$$

为估计 I, II, 需要用到式 (14), (15) 的变形. 注意 $\frac{\beta}{\delta}=\alpha$, 我们有

$$\mathrm{I}=ct\left(\int_{ct^\alpha}^{\infty}s^{-\frac{\delta p_1}{\beta}}\left(\int_0^{ct^\alpha}A_q(f)^{*p_0}(\tau)d\tau+\int_{ct^\alpha}^{s}A_q(f)^{*p_0}(\tau)d\tau\right)^{\frac{p_1}{p_0}}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\leqslant ct\left(\int_{ct^\alpha}^{\infty}s^{-\frac{\delta p_1}{\beta}-1}ds\right)^{\frac{1}{p_1}}\left(\int_0^{ct^\alpha}A_q(f)^{*p_0}d\tau\right)^{\frac{1}{p_0}}$$

$$+ct\left(\int_{ct^\alpha}^{\infty}s^{-\frac{\delta p_1}{\beta}+\frac{p_1}{p_0}-1}A_q(f)^{*p_1}(s)ds\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\leqslant C\left(\int_0^{ct^\alpha}A_q(f)^{*p_0}d\tau\right)^{\frac{1}{p_0}}+ct\left(\int_{ct^\alpha}^{\infty}A_q(f)^{*p_1}d\tau\right)^{\frac{1}{p_1}};$$

$$\mathrm{II}=ct\left(\int_{ct^\alpha}^{\infty}s^{(1-\delta)\frac{p_1}{\beta}}\left(\int_s^{\infty}A_q(f)^{*q}d\tau\right)^{\frac{p_1}{q}}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\leqslant ct\left(\int_{ct^\alpha}^{\infty}s^{(1-\delta)\frac{p_1}{\beta}+\frac{p_1}{q}-1}A_q(f)^{*p_1}ds\right)^{\frac{1}{p_1}}=ct\left(\int_{ct^\alpha}^{\infty}A_q(f)^{*p_1}d\tau\right)^{\frac{1}{p_1}}.$$

这完成了当 $p_1<q$ 时 $K(t,f,T_q^{p_0},T_q^{p_1})\leqslant CE_{p_0,p_1}(t,A_q(f)^*(t))$ 的证明. 从而式 (13) 成立的范围是 $0<p_0<p_1<\infty$, $1\leqslant q\leqslant\infty$.

利用此内插定理,可以得到关于 $T_q^{p,r}$ 的如下两个事实.

推论 1 设 $0<p<\infty$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, $0<r\leqslant\infty$. 则 $T_q^{p,r}$ 的定义不依赖于锥的开口 α 的选取.

证 选 p_0,p_1,θ 使 $0<p_0<p_1<\infty$, $\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}$. 在 $T_q^{p_0}+T_q^{p_1}$ 上定义拟线性算子 T(仍用 * 表角形极大函数)

$$T:f\to f^{*(\alpha)}(q=\infty)\ \text{或}\ f\to A_q^{(\alpha)}(f),\ (q<\infty).$$

既然 T 是 $T_q^{p_i}$ 到 L^{p_i} 有界的, $i=0,1$, 故 T 也是 $T_q^{p,r}$ 到 $L^{p,r}$ 有界的,这正是要证明的断言.

推论 2 设 $1<p<\infty$, $1\leqslant q<\infty$, $1\leqslant l<\infty$. 则 $(T_q^{p,l})^*=T_{q'}^{p',l'}$, 其中 * 表对偶空间, p',q',l' 表共轭指标.

证 利用内插的对偶定理 $(A_0,A_1)_{\theta,l}^*=(A_0^*,A_1^*)_{\theta,l'}$, 而得.

作为本文的结束,我们指出对单参数情形,定理 2 可以改进到同定理 1 一样完整的程度,即 p_1 的范围可以扩大至 $p_1\leqslant\infty$, 其中 T_q^∞ 可以理解为对任意开口锥定义的空间. 这个断言见下面的引理 4′ 与定理 2′.

引理 4′ 设 $0<p_0<\infty$，$1\leqslant q<\infty$，T_q^∞ 为对开口 $\alpha=1$ 的锥定义的 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上的帐篷空间. 则

$$C\left(\int_0^{tp_0} A_q(f)^{*p_0}d\tau\right)^{\frac{1}{p_0}}\leqslant K(t,f,T_q^{p_0},T_q^\infty)\leqslant C\left(\int_0^{ctp_0} A_q^{(3)}(f)^{*p_0}d\tau\right)^{\frac{1}{p_0}} \tag{20}$$

证　式 (20) 的第一个不等式的证明是容易的，它同于式 (12) 中相应不等式的证明. 比较困难的是要证明 $\forall f\in T_q^{p_0}+T_q^\infty$，$\forall t>0$，存在 f 的一个合适分解 $f=f_0+f_1$ 使得

$$\|f_0\|_{T_q^{p_0}}+t\|f_1\|_{T_q^\infty}\leqslant C\left(\int_0^{ctp_0} A_q^{(3)}(f)^{*p_0}d\tau\right)^{\frac{1}{p_0}}. \tag{21}$$

这只需用到文 [1] 已经发现的一个事实：对给定闭集 $F\subset\mathbb{R}^n$，如引理 1 中那样对 $\alpha=3$ 定义 F^*，则 $\forall x\in O={}^cF$，$\exists x_0\in F$（x_0 当然依赖于 x）使

$$\Gamma(x)\cap\mathscr{R}^{(3)}(F^*)\subset\Gamma^{(3)}(x_0). \tag{22}$$

考虑到文 [1] 没有写出证明，我们仍然给出它. 设 $(y,t)\in\mathscr{R}^{(3)}(F^*)$，由式 (6) 知 $B(y,t)\cap F$ 有正测度，特别有 $\bar B(y,t)\cap F\neq\varnothing$. 若此外还有 $(y,t)\in\Gamma(x)$，则

$$\bar B(x,2t)\cap F\supset\bar B(y,t)\cap F\neq\varnothing,\ \forall(y,t)\in\mathscr{R}^{(3)}(F^*)\cap\Gamma(x).$$

既然 $\{\bar B(x,2t)\cap F\}$ 当 (y,t) 遍历 $\mathscr{R}^{(3)}(F^*)\cap\Gamma(x)$ 时作为参数 t 的族是单调的非空紧集族，故其交非空，此即

$$\exists x_0\in\bar B(x,2t)\cap F,\ \forall(y,t)\in\mathscr{R}^{(3)}(F^*)\cap\Gamma(x).$$

这样

$$|x_0-y|\leqslant|x_0-x|+|x-y|<3t,\ \forall(y,t)\in\mathscr{R}^{(3)}(F^*)\cap\Gamma(x).$$

这正是式 (22) 所要求证明的.

现在利用式 (22) 来证明式 (21). 对给定的 f 与 $t>0$，令

$$O=\{A_q^{(3)}(f)(x)>A_q^{(3)}(f)^*(t^{p_0})\},$$

以及如引理 1 中那样对 $\alpha=3$ 定义 O^* 与 $F^*={}^cO^*$. 令

$$f=f_0+f_1,\ f_0=f\chi_{\hat O^{*(3)}},\ f_1=f\chi_{\mathscr{R}^{(3)}(F^*)}.$$

既然 $A_q^{(3)}(f_0)$ 支于 O^*，当然 $A_q(f_0)$ 也支于 O^*. 现在要证

$$\|A_q(f_1)\|_\infty\leqslant A_q^{(3)}(f)^*(t^{p_0}).$$

而由式 (22)，这是显然的：

$$A_q(f_1)(x)\leqslant\begin{Bmatrix}A_q^{(3)}(f)(x),\ x\in F\\ A_q^{(3)}(f)(x_0),\ x\in O\end{Bmatrix}\leqslant A_q^{(3)}(f)^*(t^{p_0}).$$

这样，我们已经得到分解

$$f=f_0+f_1,\ f_0\in T_q^{p_0},\ f_1\in T_q^\infty.$$

对此分解，我们有

$$\begin{aligned}\|f_0\|_{T_q^{p_0}}^{p_0}+t^{p_0}\|f_1\|_{T_q^\infty}^{p_0}&\leqslant\int_0^{ctp_0} A_q(f_0)^{*p_0}d\tau+t^{p_0}A_q^{(3)}(f)^{*p_0}(t^{p_0})\\&\leqslant C\int_0^{ctp_0} A_q^{(3)}(f)^{*p_0}d\tau.\end{aligned}$$

这完成了引理的证明.

定理 2′ 设 $0<p_0<\infty$，$1\leqslant q<\infty$，$0<\theta<1$，$0<r\leqslant\infty$. 则在单参数情

形下有

$$(T_q^{p_0}, T_q^{\infty})_{\theta,r} = T_q^{p,r}, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0}.$$

证　由推论1知 $T_q^{p,r}$ 的定义是不依赖于锥的开口的选取的，因此可用 $A_q^{(3)}(f) \in L^{p,r}$ 来定义．这样，由引理4′即知定理中结论成立．证毕．

注　由稳定性定理知单参数情形有

$$(T_q^{p_0}, T_q^{p_1})_{\theta,r} = T_q^{p,r}, \text{ 对 } 0 < p_0 < p_1 \leqslant \infty,\ 0 < \theta < 1,\ 0 < r \leqslant \infty,$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

参 考 文 献

[1] Coifman, R. R., Y. Meyer, E. M. Stein. Some new function spaces and their applications to Harmonic Analysis (preprint).

[2] Hang, Y. S., R. L. Long On tent spaces Tp and generalized Carleson measures, *Scientia Sinica* (*Series A*) 28(1985), 1239—1250.

[3] Holmstedt, T., Interpolation of quasi-normed spaces, *Math. Scand.*, 26(1970), 177—199.