第 30 卷 第 6 期 数 学 学 报 Vol. 30, No. 6
1987 年 11 月 ACTA MATHEMATICA SINICA Nov., 1987

某些 p-adic 数的超越性和代数无关性 (I)*

朱 尧 辰
(中国科学院应用数学研究所)

§1. 引 言

历史上最早被证明为超越数的是 Liouville 数 $\sum_{n=1}^{\infty} g^{-n!}$ (其中 $g \geqslant 2$ 是有理整数)[1]. 其后许多文献[2-4]将此结果加以推广,迄今最一般的结果是 Cijsouw 和 Tijdeman[5] 所得到的,他们考察了下列快速收敛的具有代数系数 a_k 的幂级数

$$\sigma(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{e_k} \tag{1}$$

在代数点上值的超越性.

另一方面,许多文献考察了 p-adic 指数函数、对数函数及幂函数的值的超越性(见,例如[6]及所附文献),但对于与(1)相对应的 p-adic 幂级数值的超越性的研究则不多见. 由 Bundschuh 和 Wallisser[7] 的结果可以推出: 若有理整数 g 适合 $|g|_p < 1$ (此处 $|\,|_p$ 表示 p-adic 赋值),无穷自然数列 $\lambda_k (k = 1, 2, \cdots)$ 适合 $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} = 0$, 则 p-adic 数 $\sum_{k=1}^{\infty} g^{\lambda_k}$ 是 Liouville 数. 这是上述 Liouville 数的 p-adic 类似.

本文的目的是给出上述 Cijsouw-Tijdeman 结果的 p-adic 类似,亦即考察 p-adic 幂级数

$$\tau(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{\lambda_k} \tag{2}$$

在代数点上值的超越性(见 §3), 其中 c_k 是 p-adic 代数数, $\lambda_k (k = 1, 2, \cdots)$ 是快速递增的无穷自然数列. 特别, 由此也可推出上述 p-adic 数 $\sum_{k=1}^{\infty} g^{\lambda_k}$ 的超越性. 另外, 我们还给出某些特殊类型的(2)形级数的超越值的超越性度量(§4).

---

* 1983 年 4 月 6 日收到、1984 年 5 月 24 日收到修改稿.

§2. 预　备

我们用 N, Z, Q, R, C 分别表示全体自然数、有理整数、有理数、实数和复数的集合，用 $\mathbb{Z}[z]$ 表示变量为 z 的整系数多项式的全体所成的集合.

设 p 为一固定素数，$|\ |_p$ 表示规范化的 p-adic 赋值（即 $|p|_p = 1/p$），$|\ |$ 表示通常的绝对值. $\mathbb{Q}_p$ 表示 p-adic 数域，$\mathbb{C}_p$ 表示 $\mathbb{Q}_p$ 的完备代数闭包.

与 C 的情况类似，设 $\theta \in \mathbb{C}_p$ 满足一个 Z 上的非零多项式，则 θ 称为 p-adic 代数数，θ 所满足的次数最低的 Z 上的非零多项式称为 θ 的极小多项式（它一定不可约）. 若 θ 的极小多项式首项系数为 1，则 θ 称为 p-adic 代数整数. p-adic 代数数的全体形成的集记为 $\mathbb{A}_p$，而 C 中的代数数全体的集记为 A. 由 Steinitz 定理（见 [8]，第 8 章，§62）可知 $\mathbb{A}_p$ 与 A 关于 Q 等价，即存在一个由 A 到 $\mathbb{A}_p$ 上的同构 σ，保持 Q 中的每个元素不动. 若 $\theta \in \mathbb{A}_p$，则记 $\theta' = \sigma\theta \in \mathbb{A}$，并令 $|\theta| = |\theta'|$.

对于任何多项式 $P(z) \in \mathbb{Z}[z]$，用 $H(P)$ 表示它的高，即 $P(z)$ 的系数绝对值的最大值，用 $\deg(P)$ 表示它的次数，令 $S(P) = \deg(P) + H(P)$，称为 $P(z)$ 的尺度 (Size).

设 $\theta \in \mathbb{A}_p$，则其极小多项式的高、次数、尺度分别称为 θ 的高、次数、尺度，记为 $H(\theta)$，$\deg(\theta)$，$S(\theta)$. 又设 $m \in \mathbb{Z}$ 使 $m\theta$ 为 p-adic 代数整数，则 m 称为 θ 的一个分母. 若 $\theta_1, \cdots, \theta_s \in \mathbb{A}_p$，$m \in \mathbb{Z}$ 使 $m\theta_1, \cdots, m\theta_s$ 都是 p-adic 代数整数，则 m 称为 $\theta_1, \cdots, \theta_s$ 的一个公分母. 若 $\theta \in \mathbb{A}_p$ 的共轭元为 $\theta^{(1)} = \theta, \theta^{(2)}, \cdots, \theta^{(d)}$，则令 $\overline{|\theta|} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant d} |\theta^{(i)}|$.

显然，$\theta \in \mathbb{A}_p$ 与其对应元素 $\theta' = \sigma\theta \in \mathbb{A}$ 有相同的极小多项式，从而有相同的高、次数、尺度和分母，并且 $\overline{|\theta|} = \overline{|\theta'|}$.

对任何 $a \in \mathbb{C}$，记 $a^* = \max(1, |a|)$.

下面给出一些引理.

引理 2.1　设 $d \geqslant 1$，$P(z) = a_0 z^d + a_1 z^{d-1} + \cdots + a_d \in \mathbb{Z}[z]$ 在 C（或 $\mathbb{C}_p$）中有根 $\alpha_1, \cdots, \alpha_d$，又设 $i_1, \cdots, i_s$ 是 $\{1, \cdots, d\}$ 中的任意 s 个标号，则 $a_0\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_s}$ 是代数整数（或是 p-adic 代数整数）.

证. 对 C 的情形见，例如 [9] 的引理 1.8，$\mathbb{C}_p$ 的情形证法类似.

引理 2.2　设 $\theta \in \mathbb{A}_p$，$\deg(\theta) = d$，$H(\theta) = h$，m 为 θ 的一个分母，则

$$h \leqslant (2m\overline{|\theta|}^*)^d.$$

证　可由 [5] 的引理 1 推出.

引理 2.3　设 $f(z)$，$g(z) \in \mathbb{Z}[z]$，次数分别为 $d(f)$，$d(g)$，高分别为 $H(f)$，$H(g)$. 若 f, g 无公根，则对任何 $\omega \in \mathbb{C}_p$，有

$$\max(|f(\omega)|_p, |g(\omega)|_p) \geqslant (H(f)^{d(g)}H(g)^{d(f)}(d(f)+1)^{d(g)/2}(d(g)+1)^{d(f)/2})^{-1}.$$

证　记

$$f(z) = \sum_{i=0}^{m} a_i z^{m-i},\quad g(z) = \sum_{i=0}^{n} b_i z^{n-i},$$

其中 $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$，$m = d(f)$，$n = d(g)$. 因 f, g 无公根，故其结式

$$R(f, g)=\begin{vmatrix} a_0 & \cdots & a_m & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & a_0 & \cdots & a_m \\ b_0 & \cdots & b_n & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & b_0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} n\text{ 行} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} m\text{ 行} \end{matrix} \tag{3}$$

(行列式空白处元素为 0，下同)是非零有理整数．由行列式的 Hadamard 不等式得

$$|R| \leqslant H(f)^n H(g)^m (m+1)^{n/2}(n+1)^{m/2},$$

故由乘积公式得

$$|R|_p \geqslant H(f)^{-n} H(g)^{-m} (m+1)^{-n/2}(n+1)^{-m/2}. \tag{4}$$

另一方面，对任意 $\omega \in \mathbf{C}_p$，若 $|\omega|_p \leqslant 1$，则可用 ω^{m+n-k} 乘 (3) 的第 k 列 ($k=1, 2, \cdots, m+n$)，然后加到最末列上得

$$R(f, g)=\begin{vmatrix} a_0 & \cdots & a_{m-1} & a_m & \cdots & \omega^{n-1}f(\omega) \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & \omega^{n-2}f(\omega) \\ & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ & & a_0 & \cdots & a_{m-1} & f(\omega) \\ b_0 & \cdots & b_{n-1} & b_n & \cdots & \omega^{m-1}g(\omega) \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & \omega^{m-2}g(\omega) \\ & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ & & b_0 & \cdots & b_{n-1} & g(\omega) \end{vmatrix}, \tag{5}$$

类似地，若 $|\omega|_p > 1$，则以 ω^{-k} 乘 (3) 的第 k 列 ($k=1, 2, \cdots, m+n$)，然后加到第一列上，可得

$$R(f, g)=\begin{vmatrix} \omega^{-m-1}f(\omega) & a_1 & \cdots & a_m & & & \\ \omega^{-m-2}f(\omega) & \ddots & \ddots & & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ \omega^{-m-n}f(\omega) & \cdots & a_0 & a_1 & \cdots & & a_m \\ \omega^{-n-1}g(\omega) & b_1 & \cdots & b_n & & & \\ \omega^{-n-2}g(\omega) & \ddots & \ddots & & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ \omega^{-m-n}g(\omega) & \cdots & b_0 & b_1 & \cdots & & b_n \end{vmatrix}. \tag{5'}$$

故由 (5), (5′) 得到

$$|R|_p \leqslant \max(|f(\omega)|_p,\ |g(\omega)|_p). \tag{6}$$

由 (4), (6) 即得结果.

引理 2.4 设 $P(z) \in \mathbb{Z}[z]$，$\neq 0$，$\deg(P)=D$，$H(P)=H$．又设 $\alpha \in \mathbf{A}_p$，$\deg(\alpha)=d$，$H(\alpha)=h$．则或者 $P(\alpha)=0$，或者

$$|P(\alpha)|_p \geqslant (H^d h^D (D+1)^{d/2}(d+1)^{D/2})^{-1}. \tag{7}$$

证 在引理 2.3 中取 $f=P$，$g=\alpha$ 的极小多项式，以及 $\omega=\alpha$．若 $P(\alpha)\neq 0$，则 f, g 无公根，故得 (7).

引理 2.5 设 $d \geqslant 1$，$P(z)=a_0 z^d + a_1 z^{d-1} + \cdots + a_d \in \mathbb{Z}[z]$．若 $P(z)$ 在 $\mathbf{C}$ 中有根 $\alpha_1, \cdots, \alpha_d$，则

$$|a_0|\alpha_1^*\cdots\alpha_d^* \leqslant |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_d|.$$

证. 见[9]的引理 2.7.

引理 2.6 设 $d \geqslant 1$, $P(z) = a_0z^d + a_1z^{d-1} + \cdots + a_d \in \mathbb{Z}[z]$ 不可约, $H(P) = H$. 若 $P(z)$ 在 $\mathbb{C}_p$ 中有根 $\alpha_1, \cdots, \alpha_d$, 而 Ω 是 $\Delta = \{(i, j) | i = 1, 2, \cdots, d; j = 1, 2, \cdots, d; i < j\}$ 的任一非空子集,则

$$\prod_{\Omega} |\alpha_i - \alpha_j|_p \geqslant (2^{\frac{3}{2}d(d-1)}(d+1)^{d-1}H^{d-1})^{-1}.$$

证 因 $P(z)$ 不可约,故 $\alpha_1, \cdots, \alpha_d$ 两两互异,于是判别式

$$D = a_0^{2d-2} \prod_{\Delta} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

是非零有理整数. 显然有

$$D = a_0^{2d-2} \prod_{\Delta} (\alpha_i' - \alpha_j')^2,$$

其中 $\alpha' = \sigma\alpha \in \mathbb{C}$. 不妨设 $|\alpha_1'| \leqslant |\alpha_2'| \leqslant \cdots \leqslant |\alpha_d'|$, 以及 $a_0 > 0$, 则有

$$\begin{aligned}|D| &= a_0^{2d-2} \prod_{\Delta} |\alpha_i' - \alpha_j'|^2 \\ &\leqslant a_0^{2d-2} \left(\prod_{\Delta} (2\alpha_i'^*)\right)^2 \\ &\leqslant 2^{d(d-1)} a_0^{2(d-1)} \prod_{i=1}^{d} (\alpha_i'^*)^{2(d-1)},\end{aligned}$$

故由引理 2.5 得

$$|D| \leqslant 2^{d(d-1)}((d+1)H)^{2(d-1)},$$

于是

$$|a_0|_p^{d-1} \prod_{\Delta} |\alpha_i - \alpha_j|_p \geqslant 2^{-\frac{1}{2}d(d-1)}((d+1)H)^{-d+1}. \tag{8}$$

设 $\Omega' = \Delta - \Omega$, 因 $\Omega' \subset \Delta$, 故 Ω' 中元素个数(记为 λ) $< \frac{1}{2}d(d-1)$. 因为

$$a_0^{d-1} \prod_{\Omega'} (\alpha_i - \alpha_j) = \Sigma a_0^{d-1}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_\lambda},$$

对右边每个加项, 在 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_\lambda}$ 中, $\alpha_1, \cdots, \alpha_d$ 都至多出现 $d-1$ 次, 故可将 $a_0^{d-1}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_\lambda}$ 表示为 μ 个 ($\mu \leqslant d-1$) 形如

$$a_0\alpha_{j_1}\alpha_{j_2}\cdots\alpha_{j_s} \quad (1 \leqslant j_1 < \cdots < j_s \leqslant d, \ s \leqslant d) \tag{9}$$

的数与 $a_0^{d-1-\mu}$ 之积,依引理 2.1, (9) 中的数是 p-adic 代数整数,从而

$$|a_0^{d-1}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_\lambda}|_p \leqslant 1,$$

故得

$$\left|a_0^{d-1} \prod_{\Omega'} (\alpha_i - \alpha_j)\right|_p \leqslant 1. \tag{10}$$

由 (8), (10) 即得引理.

引理 2.7 设 $P(z)\in\mathbb{Z}[z]$, $\deg(P)=D\geqslant 1$, $H(P)=H$, $S(P)=S=D+\log H$. 若

$$P=aQ_1^{r_1}\cdots Q_m^{r_m},$$

其中 $a\in\mathbb{Z}$, $Q_1,\cdots,Q_m\in\mathbb{Z}[z]$ 是 P 的不同的非常数不可约因子. 如果 $\xi\in\mathbb{C}_p$ 适合

$$|P(\xi)|_p\leqslant\exp(-\lambda DS)\ \text{且}\ \lambda>4,$$

那么存在一个标号 $(1\leqslant i\leqslant m)$ 使

$$|Q_i(\xi)|_p\leqslant\exp\left(-\frac{\lambda-4}{r_i}DS\right),$$

并且

$$\deg(Q_i)\leqslant\frac{D}{r_i},\ S(Q_i)\leqslant\frac{2S}{r_i}.$$

证 与[9]的引理 2.14 证法类似,只须把那儿的引理 1.9 换成此处的引理 2.4, 用 $|\ |_p$ 代替 $|\ |$.

引理 2.8 设 $\phi:\mathbb{N}\times[1,\infty]\longmapsto\mathbb{R}$ 是具有下列性质的一个函数:

(i) $\phi(n+m,\ s+t)\geqslant\phi(n,s)$, 对于一切 $n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $s\geqslant 1$, $t\geqslant 0$;

(ii) $\phi(n,s)\geqslant ns$, 对于一切 $n\in\mathbb{N}$, $s\geqslant 2$;

(iii) $\phi(\rho n,\rho s)\geqslant\rho\phi(n,s)$, 对于一切 $n\in\mathbb{N}$, $s\geqslant 1$, $\rho\in\mathbb{N}$.

又设 $\xi\in\mathbb{C}_p$ 是一个超越数,对任何非常数不可约多项式 $Q\in\mathbb{Z}[z]$ 有

$$|Q(\xi)|_p>\exp(-\phi(D(Q),\ S(Q))),$$

则对于任何非常数多项式 $P\in\mathbb{Z}[z]$ 有

$$|P(\xi)|_p>\exp(-3\phi(D(P),\ 2S(P))).$$

证 与[9]的引理 2.15 证法类似, 但需将此处的引理 2.7 代替那儿的引理 2.14, 用 $|\ |_p$ 代替 $|\ |$.

§3. 超越性定理

定理 1 设 p-adic 幂级数

$$\tau(z)=\sum_{k=1}^{\infty}c_kz^{\lambda_k}$$

的收敛半径 $R>0$,系数 $c_k\in A_p$, $\lambda_k(k=1,2,\cdots)$ 是严格单调递增自然数列,适合

$$\lim_{k\to\infty}(\lambda_k+\log M_k+\log C_k)D_k/\lambda_{k+1}=0, \tag{11}$$

其中 M_k 是 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 的最小公分母, $C_k=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\overline{|c_i|}^*$, $D_k=[\mathbb{Q}(c_1,c_2,\cdots,c_k):\mathbb{Q}]$ $(k=1,2,\cdots)$. 则当 $\theta\in A_p$, $0<|\theta|_p<R$ 时, $\tau(\theta)$ 是 p-adic 超越数.

证. 只须证明对任何非零多项式 $P(z)\in\mathbb{Z}[z]$, $P(\tau(\theta))\neq 0$. 显然, 可设 $P(z)$ 不可约. 我们设其次数为 $D\geqslant 1$, 高为 H.

设 $\deg(\theta)=d$, m 是 θ 的一个分母. 令

$$\tau_n(\theta)=\sum_{k=1}^{n}c_k\theta^{\lambda_k}\quad(n=1,2,\cdots),$$

$$r_n(\theta)=\tau(\theta)-\tau_n(\theta)\quad(n=1,2,\cdots).$$

对每个 n，$\tau_n(\theta)\in\mathbb{A}_p$，我们用 d_n，h_n 表示其次数和高.

因为 $|\theta|_p<R$，所以 $|\tau_{n+1}(\theta)-\tau_n(\theta)|_p\to 0(n\to\infty)$，故由引理 2.6 知当 n 充分大，$P(\tau_n(\theta))$，$P(\tau_{n+1}(\theta))$ 中至少有一个非零. 又因 $P(z)$ 在 $\mathbb{C}_p$ 中零点个数有限，故不妨设当 $n\geqslant n_0$ 时 $P(\tau_n(\theta))\neq 0$. 于是由引理 2.4 知当 $n\geqslant n_0$ 时，

$$|P(\tau_n(\theta))|_p\geqslant(H^{d_n}h_n^D(D+1)^{d_n/2}(d_n+1)^{D/2})^{-1}.\tag{12}$$

易见

$$d_n\leqslant dD_n.\tag{13}$$

又因为

$$\overline{|\tau_n(\theta)|}^*\leqslant nC_n\,\overline{|\theta|}^{*\lambda_n}\leqslant C_n(2\overline{|\theta|}^*)^{\lambda_n}\quad(n=1,2,\cdots),\tag{14}$$

故知存在实数 $k_0\geqslant 1$，$k_1>0$，适合

$$\overline{|\tau_n(\theta)|}^*\leqslant k_1\cdot C_nk_0^{\lambda_n}\quad(n=1,2,\cdots)\tag{15}$$

又由于 $m^{\lambda_n}M_n$ 是 $\tau_n(\theta)$ 的一个分母，故由 (13)，(15) 及引理 2.2 得

$$\begin{aligned}h_n&\leqslant(2m^{\lambda_n}M_n\cdot k_1C_nk_0^{\lambda_n})^{dD_n}\\&=(2k_1M_nC_n)^{dD_n}\cdot(mk_0)^{dD_n\lambda_n}.\end{aligned}\tag{16}$$

注意

$$(D+1)^{1/2}\leqslant 2^D,\quad(dD_n+1)^{1/2}\leqslant 2^{dD_n},$$

故由 (12)，(13)，(16) 得

$$\begin{aligned}|P(\tau_n(\theta))|_p&>((8k_1M_nC_n)^{dD_n(D+\log H)}(mk_0)^{dDD_n\lambda_n})^{-1}\\&=\exp(-dD_n\log(8k_1M_nC_n)\cdot S-dD\log(mk_0)\cdot D_n\lambda_n),\end{aligned}\tag{17}$$

式中 $S=S(P)=D+\log H$.

另一方面，由 R 的定义，取 $\rho\in\mathbb{R}$ 适合不等式 $|\theta|_p<\rho<R$，则当 $n\geqslant n_1$ 时，$|C_n|_p<\rho^{-\lambda_n}$，$|C_n\theta^{\lambda_n}|_p\leqslant(\rho^{-1}|\theta|_p)^{\lambda_n}$，于是

$$|r_n(\theta)|_p\leqslant(\rho^{-1}|\theta|_p)^{\lambda_{n+1}}=\exp(-\log(\rho|\theta|_p^{-1})\cdot\lambda_{n+1}),\tag{18}$$

注意式中 $\log(\rho|\theta|_p^{-1})>0$.

设 $P(z)=\sum_{i=0}^{D}a_iz^{D-i}$，则

$$|P(\tau(\theta))-P(\tau_n(\theta))|_p=\left|\sum_{i=0}^{D-1}a_i(\tau(\theta)^{D-i}-\tau_n(\theta)^{D-i})\right|_p.\tag{19}$$

因为由 (18) 知当 $n\geqslant n_2$ 时 $|\tau_n(\theta)|_p=|\tau(\theta)|_p$，所以

$$\begin{aligned}&|\tau(\theta)^k-\tau_n(\theta)^k|_p\\&=|\tau(\theta)-\tau_n(\theta)|_p\cdot|\tau(\theta)^{k-1}+\tau(\theta)^{k-2}\tau_n(\theta)+\cdots+\tau_n(\theta)^{k-1}|_p\\&\leqslant|\tau(\theta)|_p^{k-1}\cdot|r_n(\theta)|_p\\&\leqslant(|\tau(\theta)|_p)^{*D}\cdot|r_n(\theta)|_p\quad(k=1,2,\cdots,D).\end{aligned}\tag{20}$$

于是由 (18)，(19)，(20) 得

$$|P(\tau(\theta))-P(\tau_n(\theta))|_p\leqslant(|\tau(\theta)|_p)^{*D}_0\cdot|r_n(\theta)|_p$$
$$\leqslant\exp(-\log(\rho|\theta|_p^{-1})\cdot\lambda_{n+1}+D\log(|\tau(\theta)|_p)^*).\tag{21}$$

由 (11) 可知当 $n\geqslant n_3$ 时，(17) 右边>(21) 右边，于是当 $n\geqslant\max(n_0, n_1, n_2, n_3)$ 时，

$$|P(\tau_n(\theta))|_p>|P(\tau(\theta))-P(\tau_n(\theta))|_p,$$

从而

$$|P(\tau(\theta))|_p=|P(\tau(\theta))-P(\tau_n(\theta))+P(\tau_n(\theta))|_p=|P(\tau_n(\theta))|_p,$$

故由 (17) 得到

$$|P(\tau(\theta))|_p>\exp(-dD_n\log(8k_1M_nC_n)\cdot S-dD\log(mk_0)\cdot D_n\lambda_n)$$
$$(\text{当 } n\geqslant\max(n_0, n_1, n_2, n_3))。\tag{22}$$

因此 $P(\tau(\theta))\neq 0$. 定理得证.

附注 为证明本定理，实际不必引入不等式 (15)，但为了建立超越性度量，引进参数 k_1, k_0 可以使我们统一处理一些特殊情形（见 § 4).

§ 4. 超越性度量

我们继续上节的讨论. 一般地，常数 n_0, n_1, n_2, n_3 是不可计算的，(22)右边的式子与 λ_n 的具体形式有关，因此它一般不能给出相应的超越性度量. 我们下面只对 $\lambda_n=n!$ 的情形给出超越性度量，特别，可以得到 Liouville 数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p^{n!}$ 的超越性度量.

定理 2 令

$$\tau_0(z)=\sum_{k=1}^{\infty}c_kz^{k!},\tag{23}$$

设系数 $c_k\in\mathbb{K}\subset\mathbb{A}_p(k=1, 2, \cdots)$, $[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]=D_0$, 并且

$$M_n\leqslant M_0\ (n=1, 2, \cdots),\tag{24}$$
$$C_n\leqslant C_0^n\ (n=1, 2, \cdots),\tag{25}$$

式中 M_n, C_n 的意义同定理 1, $M_0\in\mathbb{Z}$, $C_0\geqslant 1$ 是两个常数. 又设 $\theta\in\mathbb{A}_p$, $0<|\theta|_p<1$, $\deg(\theta)=d$, m 是 θ 的一个分母. 令

$$\xi=\tau_0(\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\theta^{k!},\tag{26}$$

则存在一个可计算常数 $\gamma>0$ (只与 ξ 有关)，使对所有次数为 $D\geqslant 1$，尺度为 S 的多项式 $P(z)\in\mathbb{Z}[z]$ 有

$$|P(\xi)|_p>e^{-\gamma((\beta(D+1))^{\beta(D+1)}+DS(1+\log S)^{3-\delta_{1,C_0}})}.\tag{27}$$

式中

$$\delta_{1,C_0}=1\ (\text{若 } C_0=1),\ =0\ (\text{若 } C_0>1),$$
$$\beta=\max\left(\frac{dD_0\log(mk_0)+\log M_0}{\log|\theta|_p^{-1}}, 1+\log M_0\right),$$

而 $k_0\geqslant 1$ 是具有下列性质的实数：存在 $k_1>0$ 使

$$\left|\overline{\sum_{k=1}^{n} c_k\theta^{k_1}}\right|^* \leqslant k_1 \cdot C_n \cdot k_0^{n_1} \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{28}$$

附注 1　由 (14)，可取 $k_0 = 2\overline{|\theta|}^*$，$k_1 = 1$. 在特殊情况下可以有其他取法(见后面推论).

附注 2.　由 [10] 的引理 2 知：对任何超越数 $\xi \in \mathbf{C}_p$，其超越性度量不可能比 $e^{-\gamma_1(D+1)\log H}$($\gamma_1 > 0$ 是常数)好.

在证定理 2 之前,先证几个引理.

引理 4.1　级数 (23) 的收敛半径 $R_0 = 1$.

证.　因 $M_k c_k$ 是代数整数，故 $|M_k c_k|_p \leqslant 1$，于是 $|c_k|_p \leqslant |M_k|_p^{-1}$. 但 $M_k \in \mathbf{Z}$，故由 (24) 得 $|M_k|_p \geqslant M_k^{-1} \geqslant M_0^{-1}$，于是

$$|c_k|_p \leqslant M_0 \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{29}$$

类似地,若 $\deg(c_k) = \delta_k$，$c_k^{(1)} = c_k$，$c_k^{(2)}$，$\cdots$，$c_k^{(\delta_k)}$ 是 c_k 的共轭元,则

$$|c_k^{(\tau)}|_p \leqslant M_0 (\tau = 1, \cdots, \delta_k;\ k = 1, 2, \cdots). \tag{30}$$

由 (29) 立得

$$R_0 \geqslant 1. \tag{31}$$

另一方面,因 $M_k^{\delta_k} c_k^{(1)} \cdots c_k^{(\delta_k)} \in \mathbf{Z}$，故由 (25) 得

$$\begin{aligned}|M_k^{\delta_k} c_k^{(1)} \cdots c_k^{(\delta_k)}|_p &\geqslant |M_k^{\delta_k} c_k^{(1)} \cdots c_k^{(\delta_k)}|^{-1} \\ &\geqslant M_k^{-\delta_k} \overline{|c_k|}^{-\delta_k} \geqslant M_k^{-\delta_k} C_0^{-k\delta_k},\end{aligned}$$

因 $|M_k|_p < 1$，并注意 (30) 及 $\delta_k \leqslant D_0$，得

$$\begin{aligned}|c_k|_p &\geqslant |c_k^{(2)} \cdots c_k^{(\delta_k)}|_p^{-1} \cdot M_k^{-\delta_k} C_0^{-k\delta_k} \\ &\geqslant M_0^{-2D_0+1} C_0^{-kD_0},\end{aligned}$$

故得

$$R_0 \leqslant 1. \tag{32}$$

由 (31)，(32) 立得 $R_0 = 1$.

引理 4.2　对于定理 2 中的 ξ，存在可计算常数 $\gamma_2 > 0$ (只与 ξ 有关)，使对任何次数为 $D \geqslant 1$，尺度为 S 的不可约多项式 $Q(z) \in \mathbf{Z}[z]$ 有

$$|Q(\xi)|_p > e^{-\gamma_2((\beta(D+1))^{\beta(D+1)} + DS(\log S)^{3-\delta_{1,c_0}})}. \tag{33}$$

证　先设 $C_0 > 1$. 令

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \theta^{k_1}, \quad r_n = \xi - \xi_n \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

因 $R_0 = 1$，而 $0 < |\theta|_p < 1$，故由 (29) 得

$$|r_n|_p = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \theta^{k_1}\right|_p \leqslant M_0 |\theta|_p^{(n+1)_1} \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{34}$$

又因

$$|\xi_n|_p = \left|\sum_{k=1}^{n} c_k \theta^{k_1}\right|_p \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |c_k|_p |\theta|_p^{k_1},$$

故由 (29) 得

$$|\xi_n|_p \leqslant M_0 \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{35}$$

由 (34) 并注意 $\log|\theta|_p^{-1} > 0$，可知 n 充分大时 $|r_n|_p < |\xi|_p$，故 $|\xi_n|_p = |\xi - r_n|_p = |\xi|_p$，从而由 (35) 得

$$|\xi|_p \leqslant M_0. \tag{36}$$

现在分别考虑两种情况.

a) 设

$$S > \max(10^4,\ \log(8k_1M_0C_0)/\log(mk_0),\ 1/\log|\theta|_p^{-1}). \tag{37}$$

我们记

$$N_1 = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid (n-1)! > \alpha^* S\}, \tag{38}$$

$$N_2 = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n > \beta(D+1) - 1\}, \tag{39}$$

$$N = \max(N_1, N_2), \tag{40}$$

其中

$$\alpha = \max(\log(8k_1M_0C_0)/\log(mk_0),\ 1/\log|\theta|_p^{-1}).$$

现在设 $n \in \mathbb{Z}$，$n \geqslant N$，并且 $Q(\xi_n) \neq 0$，那么由 (17) (用 Q 代 P，ξ_n 代 $\tau_n(\theta)$)，并注意 (24)，(25) 及 $D_n \leqslant D_0$，可得

$$|Q(\xi_n)|_p > \exp(-dD_0\log(8k_1M_0C_0)\cdot nS - dD_0\log(mk_0)\cdot Dn!). \tag{41}$$

由于 $n \geqslant N$，从 (38) 得

$$\log(8k_1M_0C_0)\cdot nS < \log(mk_0)\cdot n!,$$

于是

$$|Q(\xi_n)|_p > \exp(-dD_0\log(mk_0)\cdot(D+1)n!). \tag{42}$$

另一方面，由

$$|\xi^k - \xi_n^k|_p = |r_n|_p \cdot |\xi^{k-1} + \xi^{k-2}\xi_n + \cdots + \xi_n^{k-1}|_p \quad (k = 1, 2, \cdots, D),$$

并注意 (19)，(34)，(35)，(36)，可得

$$|Q(\xi) - Q(\xi_n)|_p \leqslant M_0^D|\theta|_p^{(n+1)!}. \tag{43}$$

由 (39) 可知

$$(n+1)\log|\theta|_p^{-1} > dD_0\log(mk_0)\cdot(D+1) + D\log M_0,$$

故由 (42)，(43) 得

$$|Q(\xi) - Q(\xi_n)|_p < |Q(\xi_n)|_p,$$

于是当 $n \geqslant N$ 且 $Q(\xi_n) \neq 0$ 时有

$$|Q(\xi)|_p > \exp(-dD_0\log(mk_0)\cdot(D+1)n!). \tag{44}$$

由引理 2.6 知 $Q(z)$ 的任二根 α_i，α_j 适合

$$|\alpha_i - \alpha_j|_p \geqslant (2^{\frac{1}{2}D(D-1)}(D+1)^{D-1}H^{D-1})^{-1},$$

因 $2^{\frac{1}{2}D}(D+1) \leqslant e^{D+1}$，故

$$|\alpha_i - \alpha_j|_p \geqslant (e^{D^2-1}H^{D-1})^{-1} > e^{-DS},$$

而由 (29) 可知

$$|\xi_{N+1} - \xi_N|_p \leqslant M_0|\theta|_p^{(N+1)!},$$

由 (38)，(39) 得

$$N! > \frac{1}{\log|\theta|_p^{-1}} S,\ N+1 > (1+\log M_0)D,$$

故得

$$|\alpha_i - \alpha_j|_p > |\xi_{N+1} - \xi_N|_p,$$

即 $Q(\xi_N)$, $Q(\xi_{N+1})$ 不可能同时为零. 于是由 (44) 可知

$$|Q(\xi)|_p > \exp(-dD_0 \log(mk_0)\cdot(D+1)\cdot(N+1)!). \tag{45}$$

现在来估计 $(N+1)!$ 的上界.

(i) 若 $N = N_1$, 则由 (38) 知

$$(N-2)! \leqslant \alpha^* S, \tag{46}$$

$$N \leqslant \alpha^* S + 2. \tag{47}$$

因当 $N \geqslant 9$ 时 $N+1 < \log(N-1)!$, 故得

$$\begin{aligned}(N+1)! &= (N+1)N(N-1)\cdot(N-2)!\\ &\leqslant (\log(N-1)!)^3\cdot(N-2)!\\ &\leqslant (\log(N-1)+\log(N-2)!)^3\cdot(N-2)!,\end{aligned}$$

由 (37), (46), (47) 得

$$(N+1)! \leqslant (3\log(\alpha^* S))^3\cdot\alpha^* S \leqslant 6^3\alpha^* S(\log S)^3. \tag{48}$$

(ii) 若 $N = N_2$, 则由 (39),

$$N \leqslant \beta(D+1). \tag{49}$$

因当 $N \geqslant 1$ 时 $N! \leqslant 2N^{N-2}$, 故得

$$(N+1)! = (N+1)\cdot N! \leqslant 2N\cdot 2N^{N-2} = 4N^{N-1},$$

于是由 (49) 得

$$(N+1)! \leqslant 4(\beta(D+1))^{\beta(D+1)-1}. \tag{50}$$

由 (45), (48), (50) 知

$$|Q(\xi)|_p > e^{-\gamma'((\beta(D+1))^{\beta(D+1)}+DS(\log S)^3)}, \tag{51}$$

其中 $\gamma' > 0$ 是一个只与 ξ 有关的可计算常数.

b) 现设 (37) 不成立, 亦即

$$S \leqslant \max(10^4,\ \log(8k_1M_0C_0)/\log(mk_0),\ 1/\log|\theta|_p^{-1}),$$

那么不可约多项式 $Q(z) \in \mathbf{Z}[z]$ 个数有限, 从而存在一个可计算常数 $\gamma'' > 0$ 使

$$|Q(\xi)|_p > e^{-\gamma''((\beta(D+1))^{\beta(D+1)}+DS(\log S)^3)}. \tag{52}$$

令 $\gamma_2 = \max(\gamma', \gamma'')$, 由 (51), (52) 立得 (33).

最后, 对 $C_0 = 1$, 只须将上述证明稍作修改即可, 亦即 (38) 换为

$$N_1 = \min\{n \in \mathbf{Z} \mid n! > \alpha^* S\},$$

(41) 换为

$$|Q(\xi_n)|_p > \exp(-dD_0\log(8k_1M_0C_0)\cdot S - dD_0\log(mk_0)\cdot Dn!),$$

(46), (47) 分别换为

$$(N-1)! \leqslant \alpha^* S,\ N \leqslant \alpha^* S + 1,$$

注意 $(N+1)! = (N+1)N\cdot(N-1)! \leqslant (\log(N-1)!)^2\cdot(N-1)!$, 故 (48) 换为

$$(N+1)! \leqslant 4\alpha^* S(\log S)^2.$$

于是也得 (33)，其中 $\delta_{1,C_0}=1$. 引理证完.

定理 2 之证. 在引理 2.8 中取

$$\phi(n,s)=\gamma_2((\beta(n+1))^{\beta(n+1)}+ns(\log s)^{3-\delta_{1,C_0}}),$$

即可由 (33) 得 (27)，其中 $\gamma=6\gamma_2$. 定理证完.

推论 1 令

$$\xi_1=\sum_{k=1}^{\infty}c_k p^{k!},$$

其中 $c_k\in\mathbb{K}\subset A_p(k=1,2,\cdots)$ 都是代数整数，$[\mathbb{K}:Q]=D_0, C_n\leqslant C_0^n(n=1,2,\cdots)$. 则对任何次数为 $D\geqslant 1$，尺度为 S 的多项式 $P(z)\in\mathbb{Z}[z]$ 有

$$|P(\xi_1)|_p>e^{-\gamma_3((D_0(D+1))^{D_0(D+1)}+DS(\log S)^{3-\delta_{1,C_0}})},$$

其中 $\gamma_3>0$ 是一个只与 ξ_1 有关的可计算常数.

证 易见此时 $M_0=1$, $m=1$, $d=1$, $|\theta|_p=|p|_p=p^{-1}$, 又因

$$\left|\overline{\sum_{k=1}^{n}c_k p^{k!}}\right|^*\leqslant C_n\sum_{k=1}^{n}p^{k!}\leqslant\frac{p}{p-1}\cdot C_n\cdot p^{n!},$$

故 $k_0=p$, 于是 $\beta=D_0$, 故得结果.

推论 2 令

$$\xi_2=\sum_{k=1}^{\infty}p^{k!},$$

则对任何次数为 $D\geqslant 1$，尺度为 S 的多项式 $P(z)\in\mathbb{Z}[z]$ 有

$$|P(\xi_2)|_p>e^{-\gamma_4((D+1)^{D+1}+DS(\log S)^2)},$$

其中 $\gamma_4>0$ 是一个只与 p 有关的可计算常数.

证 此时 $D_0=1$, $C_0=1$, $\delta_{1,C_0}=1$, 故得结果.

参 考 文 献

[1] Schneider, Th., Einführung in die Transzendenten Zahlen, Springer Verlag, Berlin, 1957.

[2] Cohn, H., Note on almost-algebraic numbers, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52(1946), 1042—1045.

[3] Baron, G., Braune, E., Zur Transzendenz von Lückenreihem mit ganzalgebraischen Koeffizienten und algebraischem Argument, *Comp. Math.*, 22(1970), 1—6.

[4] Mahler, K., Arithmetic properties of lacunary power series with integral coefficients, *J. Austral. Math. Soc.*, 5(1965), 55—64.

[5] Cijsouw, P. L., Tijdeman, R., On the transcendence of certain power series of algebraic numbers, *Acta Arith.*, 23(1973), 301—305.

[6] Adams, W., Transcendental numbers in the p-adic domain, *Amer. J. Math.*, 88(1966), 279—308.

[7] Bundschuh, P. und Wallisser, R., Algebraische Unabhängigkeit p-adischer Zahlen, *Math. Ann.*, 221(1976), 243—249.

[8] 范·德·瓦尔登，代数学 (I)，科学出版社，北京，1964.

[9] Cijsouw, P. L., Transcendence Measures, Thesis, Akademisch Proefschrift, Amsterdam, 1972.

[10] Morrison, J. F., Approximation of p-adic numbers by algebraic numbers of bounded degree, *J. of Number Theory*, 10(1978), 334—350.