第39卷第2期　　数　学　学　报　　Vol.39, No. 2
1996年3月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　Mar., 1996

一类 abundant 半群的构造

景奉杰
(武汉大学管理学院，武汉　430072)
陈　辉
(绥化师范专科学校，绥化　152061)
曾祥金
(荆州师范专科学校，江陵　434104)

摘　要: 本文讨论 abundant 半群上中间幂等元的性质，研究具有正规中间幂等元的 quasi-adequate 半群及若干极端情形，并分别给出各类半群的构造.

关键词: abundant 半群、 quasi-adequate 半群、 adequate 半群、中间幂等元、正规中间幂等元

具有中间幂等元的 abundant 半群已被广泛研究. 作为其重要的特殊情形, 文 [1] 研究了具有正规中间幂等元的 abundant 半群, 并给出了这类半群的构造. 从而, 以统一的方式推广了 Blyth 和 McFadden[2] 及 El-Qallali[3] 的相应工作. 本文研究 abundant 半群上中间幂等元的进一步性质，应用 [1] 中的构造定理到 quasi-adequate 半群及若干极端情形，并给出各类半群更确切的构造性描述. 第一节在若干准备之后，给出 abundant 半群上中间幂等元的若干重要性质. 第二节描述具有正规中间幂等元的 quasi-adequate 半群的构造. 第三节考察若干极端情形，即幂等元集分别为左正规、右正规和矩形带的具有正规中间幂等元的 quasi-adequate 半群.

1　中间幂等元

文中一般定义和记号见 [4].

设 S 是一个半群.　S 上的 Green $*$- 关系 $\mathcal{L}^*$ 和 $\mathcal{R}^*$ 可以等价地定义如下:

$$\mathcal{L}^* = \{(a,b) \in S \times S \mid (\forall x, y \in S^1) ax = ay \Leftrightarrow bx = by\},$$
$$\mathcal{R}^* = \{(a,b) \in S \times S \mid (\forall x, y \in S^1) xa = ya \Leftrightarrow xb = yb\}.$$

按 Fountain [5], 半群 S 称为 abundant 半群，如果 S 的每个 $\mathcal{L}^*$- 类和 $\mathcal{R}^*$- 类均含幂等元; abundant 半群 S 称为 quasi-adequate 半群，如果 S 的幂等元集形成带;　abundant 半群 S 称为 adequate 半群，如果 S 的幂等元集形成半格.　adequate 半群称为型 A 半群，如果对任何 $e^2 = e$, $a \in S$, $eS \cap aS = eaS$, $Se \cap Sa = Sae$.

1994 年 11 月 5 日收到,　1994 年 12 月 6 日收到修改稿.
国家自然科学基金资助项目.

引理 1.1[5] 设 S 是一个半群, $e^2=e, a\in S$. 则 $e\mathcal{L}^*a(e\mathcal{R}^*a)$ 当且仅当 $ae=a\ (ea=a)$ 且

$$(\forall x,y\in S^1)ax=ay(xa=ya)\Rightarrow ex=ey(xe=ye).$$

设 S 是 abundant 半群, E 是其幂等元集. 令

$$f\in L_a^*\cap E,\quad e\in R_a^*\cap E.$$

则引理 1.1 表明 $a=ea=af=eaf$. 假定 S 是 adequate 半群, 则 S 的每个 $\mathcal{L}^*$- 类和 $\mathcal{R}^*$- 类恰含唯一的幂等元. 在此情形, L_a^* 和 R_a^* 中唯一的幂等元分别记为 a^* 和 a^+. 由此立得, $a=a^+a=aa^*=a^+aa^*$.

引理 1.2[6] 若 S 是 adequate 半群, 则

$$(\forall a\in S,e\in E)(ea)^+=ea^+,\quad (ae)^*=a^*e.$$

定义 1.3 abundant 半群 S 的幂等元 u 称为中间的, 如果对任何 $x\in\overline{E}=\langle E\rangle$, $x=xux$. 中间幂等元 u 称为正规的, 如果子带 $u\overline{E}u$ 为半格.

命题 1.4 若 S 含有中间幂等元 u, 则

$$(\forall x\in\overline{E})\quad uxu\in V(x).$$

命题 1.4 的证明只需例行的验算. 然而, 注意到对任何 $x\in\overline{E}$, $uxu\in\overline{E}$, 我们就得到下面的推论.

推论 1.5 若 S 含中间幂等元, 则 $\overline{E}$ 必为 S 的正则子半群. 从而 $\mathrm{Reg}\,S$ 为 S 的子半群.

El-Qallali[3] 考虑了一类 abundant 半群, 即 $\overline{E}$ 是正则子半群, 且存在正规中间幂等元 u 使得 uSu 是型 A 半群. 由命题 1.5 可知, $\overline{E}$ 是正则子半群的假定是多余的.

现在引入下面的概念是方便的.

定义 1.6 abundant 半群 S 的中间幂等元 u 称为强正规的, 如果子半群 uSu 是型 A 半群.

依此定义和推论 1.5 我们看到, El-Qallali[3] 研究的半群正是具有强正规中间幂等元的 abundant 半群. 注意到定义 1.6 中, 我们没有假定 u 是正规的. 然而, 以下我们将依次证明强正规必是正规的, 而正规未必是强正规的, 并且这两个概念在正则情形下一致.

下面的命题是明显的, 它是 [2] 中一个结果的推广.

命题 1.7 设 S 是 abundant 半群, u 是中间幂等元. 则

$$\big(\forall x\in S,e\in R_x^*\cap E,f\in L_x^*\cap E\big)\quad x=eux=xuf=euxuf.$$

在 [3] 中 El-Qallali 证明, 若 S 是 quasi-adequate 半群且含强正规中间幂等元 u, 则 uS 和 Su 均为 quasi-adequate 子半群. 实际上, 将条件减弱为 S 是含有中间幂等元 u 的 abundant 半群, 我们得到相同的结果.

命题 1.8 设 S 是 abundant 半群, 含有中间幂等元 u. 则 uS, Su 和 uSu 均为 quasi-adequate 子半群. 进而, $E(uS)=u\overline{E}=uE$, $E(Su)=\overline{E}u=Eu$, $E(uSu)=u\overline{E}u=uEu$.

证明 显然, $uE\subseteq u\overline{E}\subseteq E(uS)$, $u\overline{E}$ 是 uS 的子带. 注意到对任何 $e=ux\in E(uS)$, $e=ux=u\cdot ux=ue\in uE$, 即 $E(uS)\subseteq uE$. 因此, $uE=u\overline{E}=E(uS)$.

下面证 uS 是 abundant 子半群，假定 $x \in uS$, 令 $x = uy$, $y \in S$. 因为 S 是 abundant 半群，所以存在 $e \in R_y^* \cap E$ 和 $f \in L_y^* \cap E$. 注意到 $\mathcal{R}^*$ 是左同余，我们有 $ue \in uE = E(uS)$, 且 $ue\mathcal{R}^*x$. 因此， uS 的每个 $\mathcal{R}^*$- 类包含幂等元. 为证 $uf\mathcal{L}^*x$, 简单地验算可得 $xuf = x$, 且对任何 $s, t \in (uS)^1$, 有

$$xs = xt \Rightarrow uys = uyt \Rightarrow ueuys = ueuyt \Rightarrow eueuys = eueuyt$$
$$\Rightarrow euys = euyt \Rightarrow ys = yt \Rightarrow fs = ft \Rightarrow ufs = uft.$$

因此, 由引理 1.1 知 $uf\mathcal{L}^*x$, uS 的每个 $\mathcal{L}^*$- 类包含幂等元. 于是，uS 是 S 的 quasi-adequate 子半群. 其它情形类似可证.

推论 1.9 若 u 正规， 则 uSu 是 adequate 子半群，$u(\mathrm{Reg}\, S)u$ 是 uSu 的完全逆子半群.

推论 1.10 强正规中间幂等元必为正规中间幂等元.

然而，下面的例子表明正规中间幂等元一般不是强正规的.

例 1.11 设 A 是由 a 生成的无限单演半群， B 是由 b 生成的无限单演幺半群, 其中 $b^0 = e$. 令 $S = A \cup B \cup \{1\}$, 定义二元运算如下：

$$a^m b^n = b^{m+n}, \quad b^n a^m = a^{n+m}, \quad m > 0,\ n \geq 0.$$

容易验证 S 是一个半群， 1 是单位元. S 的 $\mathcal{L}^*$- 类为 $A \cup \{1\}$, B; $\mathcal{R}^*$- 类为 $\{1\}$, $A \cup B$. $E(S) = \{1, e\}$ 是一个半格. 因此，S 是一个 adequate 半群，1 是正规中间幂等元. 但是 $S = 1S1$ 不是型 A 半群，因为 $Se \cap Sa = B \cap A \neq B\backslash\{e\} = Sae$. 所以， 1 不是强正规中间幂等元.

注意到逆半群是型 A 半群，我们有

推论 1.12 设 S 是正则半群. 则中间幂等元 u 是正规的当且仅当 u 是强正规的.

2 特征与构造

在这一节我们描述具有正规中间幂等元的 quasi-adequate 半群的特征与构造.

设 $\overline{E}$ 是幂等元生成的正则半群， u 是其正规中间幂等元， $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{R}$ 表示 $\overline{E}$ 上的 Green 关系. 设 S 是 adequate 半群. 不失普遍性，假定其幂等元半格为 $E^\circ = u\overline{E}u$.

引理 2.1[1] 设 $x, y \in S$, $e, f, g, h \in \overline{E}$, 且 $e\mathcal{L}x^+$, $f\mathcal{R}x^*$, $g\mathcal{L}y^+$, $h\mathcal{R}y^*$. 则 $e, g \in \overline{E}u$, $f, h \in u\overline{E}$, 且有 $e(xfg)^+\mathcal{L}(xfgy)^+$, $(fgy)^*h\mathcal{R}(xfgy)^*$.

于是，定义

$$W = W(\overline{E}, S) = \{(e, x, f) \in \overline{E}u \times S \times u\overline{E} \mid e\mathcal{L}x^+,\ f\mathcal{R}x^*\}.$$

则表达式

$$(e, x, f)(g, y, h) = (e(xfg)^+, xfgy, (fgy)^*h)$$

在 W 上定义了一个二元运算. 进一步，我们有如下在 [1] 中建立的构造定理，它是 [2] 和 [3] 中相应结果的统一形式的推广.

定理 2.2[1] W 是具有正规中间幂等元 $\overline{u} = (u, u, u)$ 的 abundant 半群，且 $E(W) = \{(e, x, f) \in W \mid x \in E^\circ, fe = x\}$, $\overline{E(W)} = \{(e, x, f) \in W \mid x \in E^\circ\} \simeq \overline{E}$, $\overline{u}W\overline{u} \simeq S$. 反之，任何具有正规中间幂等元的 abundant 半群都可如此构造.

注记 由于引理 2.1 在形式上比 [1] 中相应结果表达更简洁，所以定理 2.2 实际上是 [1] 中构造定理的改进与深化.

为了描述具有正规中间幂等元的 quasi-adequate 半群. 我们需要下面的一些基本结果.

引理 2.3[3] 设 S 是 abundant 半群， u 是其正规中间幂等元. 则

(i) S 是 quasi-adequate 半群当且仅当 u 是中间单位;

(ii) S 是 adequate 半群当且仅当 u 是单位元.

引理 2.4 设 E 是含正规中间幂等元 u 的带. 则 E 必为正规带.

证明 由引理 2.3, u 是 E 的中间单位. 任取 $e,x,y\in E$, 注意到 uEu 是半格，我们有

$$exye = euxuuyue = euyuuxue = eyxe.$$

因此， E 是正规带.

现假定 $\overline{E}=E$ 是具有正规中间幂等元 u 的带. 由引理 2.4 知 E 是正规带. 进一步，我们有

引理 2.5 设 $x,y\in S$, $f,g\in E$, $f\mathcal{R}x^*$, $g\mathcal{L}y^+$, 则

(i) $xfgy=xy$;

(ii) $(xfg)^+=(xy)^+$, $(fgy)^*=(xy)^*$.

证明 (i) 注意到 $fx^*=x^*$, $y^+g=y^+$, $fg\in E^\circ$ 和 E 的正规性，我们有

$$xfgy = xx^*fgx^*y = xy^+x^*gfx^*y = xy^+gfx^*y = xy^+x^*x = xx^*y^+y = xy.$$

(ii) 易证 $xfgy^+\mathcal{R}^*xfgy$. 因此

$$(xfg)^+ = (xfgy^+)^+ = (xfgy)^+ = (xy)^+.$$

类似可证 $(fgy)^*=(xy)^*$.

现在，我们定义

$$Q = Q(E,S) = \{(e,x,f)\in Eu\times S\times uE \mid e\mathcal{L}x^+, f\mathcal{R}x^*\}$$

和二元运算

$$(e,x,f)(g,y,h) = (e(xy)^+, xy, (xy)^*h).$$

结合定理 2.2 和引理 2.5, 我们就得到

定理 2.6 Q 是含正规中间幂等元 $\overline{u}=(u,u,u)$ 的 quasi-adequate 半群，且 $E(Q)=\{(e,x,f)\in Q\mid x\in E^\circ\}\simeq E$, $\overline{u}Q\overline{u}\simeq S$. 反之，任何含正规中间幂等元的 quasi-adequate 半群都可如此构造.

3 极端情形

我们已经看到，含正规中间幂等元的带必是正规带．但一般它不是左正规带和右正规带．

引理 3.1 设 E 是一个带， $u \in E$. 则

(i) E 左正规，则 u 是正规中间的当且仅当 u 是右单位元;

(ii) E 右正规，则 u 是正规中间的当且仅当 u 是左单位元.

证明 (i) 若 u 是正规中间幂等元，则

$$(\forall e \in E) \quad eu = e \cdot eu = eue = e.$$

所以， u 是右单位元.

若 u 是右单位元，则显然 u 是中间幂等元．注意到

$$(\forall e, f \in E) \quad ueu \cdot ufu = u \cdot ufu \cdot eu = ufu \cdot ueu.$$

我们看到 uEu 是一个半格，即 u 是正规中间幂等元.

(ii) 类似可证.

现假定 E 是左正规带， u 是右单位元．由 $Eu = E$, $uE = uEu$, 我们有对任何 $x \in S$, $f \in uE$, $f\mathcal{R}x^*$ 当且仅当 $f = x^*$. 于是，我们得到

$$\begin{aligned} Q = Q(E,S) &= \{(e,x,f) \in E \times S \times uE \mid e\mathcal{L}x^+, f = x^*\} \\ &= \{(e,x,x^*) \in E \times S \times uE \mid e\mathcal{L}x^+\}. \end{aligned}$$

考虑集合

$$L = L(E,S) = \{(e,x) \in E \times S \mid e\mathcal{L}x^+\}.$$

定义乘法

$$(e,x)(g,y) = (e(xy)^+, xy).$$

则我们可以建立如下的

定理 3.2 $L = L(E,S)$ 是一个 quasi-adequate 半群，其幂等元集合是含有右单位元的左正规带．反之，任何这样的半群都可如此构造.

对偶地，设 E 是右正规带，含左单位元．令

$$R = R(S,E) = \{(x,f) \in S \times E \mid f\mathcal{R}x^*\}.$$

定义乘法

$$(x,f)(y,h) = (xy, (xy)^*h).$$

我们有

定理 3.3 $R = R(S,E)$ 是一个 quasi-adequate 半群，其幂等元集是含有左单位元的右正规带．反之，任何这样的半群都可如此构造.

现假定 E 是矩形带， u 是其任意元．则 u 是正规中间幂等元，且 Eu 是左零半群， uE 是右零半群， $uEu = \{u\}$. 在此情形， S 是含唯一幂等元 u 的 adequate 半群．容易证明，对任何

$x \in S$, $e \in Eu$, $f \in uE$, 有 $x^+ = x^* = u$, $e\mathcal{L}u\mathcal{R}f$. 因此，我们有

$$Q = Q(E, S) = \{(e, x, f) \in Eu \times S \times uE \mid e\mathcal{L}u\mathcal{R}f\} = Eu \times S \times uE.$$

其上乘法为

$$(e, x, f)(g, y, h) = (e(xy)^+, xy, (xy)^* h) = (eu, xy, uf) = (eg, xy, fh).$$

于是，我们得到

定理 3.4 abundant 半群其幂等元集为矩形带当且仅当它同构于某左零半群，含唯一幂等元的 adequate 半群和右零半群的直积.

特别的，我们有

推论 3.5 幂等元集为矩形带的正则半群是矩形群.

作者感谢郭聿琦教授和岑嘉评博士对本文的指导和审稿人对本文提出的若干修改建议.

参 考 文 献

[1] Jing Fengjie. Abundant semigroups with a normal medial idempotent. *J Math.* 1994, **3**: 451–455.
[2] Blyth T S, McFadden R. On the construction of a class of regular semigroups. *J Algebra,* 1983, **81**: 1–22.
[3] El-Qallali A. On the construction of a class of abundent semigroups. *Acta Math Hung,* 1990, **56**: 77–91.
[4] Howie J M. A Introduction to Semigroup Theory. London: Academic Press, 1976.
[5] Fountain J B. Adaquate semigroups. *Proc Edinburgh Math Soc,* 1979, **22**: 113–125.
[6] Fountain J B. Abundant semigroups. *Proc London Math Soc,* 1982, **44**(3): 103–129.

The Construction of a Class of Abundant Semigroups

Jing Fengjie
(*Faculty of Business Administration, Wuhan University, Wuhan* 430072*, China*)

Chen Hui
(*Suihua Teachers College, Suihua* 152061*, China*)

Zeng Xiangjin
(*Jingzhou Teachers College, Jiangling* 434104*, China*)

Abstract: In this paper, we discuss the properties of medial idempotents on abundant semigroups, study quasi-adequate semigroups with a normal medial idempotent and some extreme cases of such semigroups, and give the description of structure of every type of such semigroups, respectively.

Keywords: abundant semigroups, quasi-adequate semigroups, adequate semigroups, medial idempotents, normal medial idempotents