第39卷第3期　　数　学　学　报　　Vol.39, No. 3
1996年5月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　May, 1996

关于奇异二阶微分方程 $(\Phi(x'))' + f(t,x) = 0$ 的某些可解准则

刘希玉

(山东师范大学数学系，济南　250014)

摘　要: 本文讨论了一类右端具有奇异性的二阶常微分方程的边值问题，证明了当 $f(t,x)$ 关于 t 的奇异程度大于某值时，边值问题无解，而当奇异程度小于某值时，边值问题有解. 关于 u 在 $u=0$ 的奇异程度没有限制.

关键词: 奇异边值问题、逼近解、锥

1　引言和主要结果

本文讨论下列方程:

$$(\Phi(x'(t))' + f(t,x(t)) = 0, \quad 0 < t < 1. \tag{1.1}$$

其中的 "$'$" 表示 $\frac{d}{dt}$, $\Phi(x) = |x|^{\beta-2} \cdot x$, $\beta > 1$, 且 $x(t)$ 满足下列 Dirichlet 边界条件 [1]:

(i) $x(0) = x(1) = 0$,

或混合边界条件:

(ii) $x(0) = 0$, $ax(1) + x'(1) = 0$, $a \geq 0$.

方程中 $f : (0,1) \times (0,\infty) \to (0,\infty)$ 连续，而且在 $t = 0,1$ 及 $x = 0$ 都有奇性，典型的例子如下:

$$f(t,x) = t^{-p}(1-t)^{-q}(x^{-r} + x^{\alpha}), \quad p,q,r,\alpha \geq 0. \tag{1.2}$$

关于方程 (1.1) 的来源及物理背景可参看 [2]–[6] 及其后的文献. 对于典型函数 (1.2), 参数 p,q,r 常称为 f 在 $t = 0,1$ 及 $x = 0$ 的奇异程度. 当 $\beta = 2$ 时，方程 (1.1) 的研究可见 [1]–[5], 其中 D. O'Regan[1] 得到当 $p < 1$, $q < 1$, $r > 0$, $(\alpha = 0)$ 时，边值问题有解. 而当 $\beta > 1$ 时，文 [6] 证明，当 $p < 1, q < 1$ 且 f 关于 x 无奇性 $(r = 0)$ 时，边值问题有解. 所用的方法为连续性定理. 本文讨论 $\beta > 1$ 这种一般情况，通过采用合适的逼近方程及解的细致先验估计，我们证明，当 $\beta > 1$, $p < \beta$, $q < \beta$, $r > 0$, $\alpha < \beta - 1$ 时，边值问题有解. 而当 $p \geq \beta$ 或 $q \geq \beta$ 时则无解. 基本上彻底回答了奇异程度为多高时边值问题才有解这个问题.

以下谈到问题 (1.1) 及 (i) 的解意为: $x \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, $x(t) > 0$, $t \in (0,1)$ 且满足 (1.1) 及 (i). 问题 (1.1) (ii) 的解意为 $x \in C[0,1] \cap C^1(0,1] \cap C^2(0,1)$ 且 $x(t) > 0$, $t \in [0,1)$, 另外满足 (1.1) (ii). 本文的主要结果如下:

定理 1.1　设下列条件满足:

1994 年 4 月 20 日收到，1994 年 9 月 8 日收到修改稿.

(N) $f(t,x)\ge g_0(t)\rho_0(x)$, $t\in(0,1)$, $x\in(0,\infty)]$. 其中 $g_0\in C[(0,1),(0,\infty)]$, $\rho_0\in C[(0,\infty),(0,\infty)]$, 而且 $\inf\limits_{(0,1)}\rho_0(x)>0$. 则问题 (1.1) 及 (i) 有解的必要条件为

$$\int_0^1|G(t)|^{\frac{1}{\beta-1}}dt<\infty,\quad G(t)=\int_{\frac12}^t g_0(s)ds. \tag{1.3}$$

而问题 (1.1) 及 (ii) 有解的必要条件为：

$$\int_{\frac12}^1 g_0(s)ds<\infty;\quad \int_0^1|G(t)|^{\frac{1}{\beta-1}}dt<\infty,\quad G(t)=\int_t^1 g_0(s)ds. \tag{1.4}$$

关于可解的充分条件，有如下假设：

(H_1) $f(t,x)\le g(t)\rho(x)$, $t\in(0,1)$, $x\in(0,\infty)$, 其中

$$g\in C[(0,1),(0,\infty)],\quad \rho\in C[(0,\infty),(0,\infty)].$$

(H_2) $\exists\,\omega>1$, $\int_0^1|G(t)|^{\frac{\omega}{\beta-1}}dt<\infty$, $G(t)=\int_{\frac12}^t g(s)ds$.

(H_2') $\exists\,\omega>1$, $\int_{\frac12}^1 g(t)dt<\infty$, $\int_0^1|G_1(t)|^{\frac{\omega}{\beta-1}}dt<\infty$. $G_1(t)=\int_t^1 g(s)ds$.

(H_3) $\rho(x)\le C(x^\alpha+1)$, $x\ge1$, 且 $0\le\alpha<\beta-1$, $C>0$.

(H_4) $\int_0^1\frac{1}{\Phi^{-1}(\rho(x))}dx<\infty$, $\Phi^{-1}(x)$ 表示 Φ 的反函数.

(H_5) $\forall H>0$, $\exists\psi\in C(0,1)$ 使 $f(t,x)\ge\psi(t)$, $t\in(0,1)$, $x\in(0,H]$, 且 $\psi(t)\ge0$. 同时 $\forall\varepsilon\in(0,1)$ 有 $0<\int_0^\varepsilon\psi(s)ds<\infty$,　$0<\int_{1-\varepsilon}^1\psi(s)ds<\infty$.

定理 1.2 设 (H_1), (H_2), (H_3), (H_4), (H_5) 满足，则问题 (1.1) 及边界条件 (i) 有解.

定理 1.3 设 (H_1), (H_2'), (H_3), (H_4), (H_5) 满足，则问题 (1.1) 及边界条件 (ii) 有解.

例 考虑下列问题：

$$\begin{cases}(|x'|^{\beta-2}x')'+t^{-p}(1-t)^{-q}(x^{-r}+x^\alpha)=0,\\ x(0)=x(1)=0,\end{cases} \tag{1.6}$$

其中 $\beta>1$, $p,q,r,\alpha\ge0$, $\alpha<\beta-1$. 则 (1.6) 有解的充要条件为 $p<\beta$, $q<\beta$. 事实上容易用定理 1.1 及 1.2 得出上述结论. 关于条件 (H_5), 只需取 $\psi(s)=H^{-r}$.

例 仍考虑 (1.6) 但将边界条件改为：　$x(0)=0$, $ax(1)+x'(1)=0$, $a\ge0$, 则问题有解的充要条件为：　$q<1$, $p<\beta$.

2　可解的必要条件

本节证明定理 1.1, 先讨论问题 (1.1) (i), 设 $x\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$ 满足方程. 记 $t_0\in(0,1)$ 满足 $x'(t_0)=0$, $x(t_0)=\|x\|_C$, 令 $m=\inf\{\rho_0(x):0<x<x(t_0)\}>0$, 则当 $t<t_0$ 时,

$$\Phi(x'(t))\ge\int_t^{t_0}g_0(t)\rho_0(x(t))dt\ge m\int_t^{t_0}g_0(s)ds,\quad x'(t)\ge m^{\frac{1}{\beta-1}}\Big[\int_t^{t_0}g_0\Big]^{\frac{1}{\beta-1}},$$

故

$$\int_0^{t_0}\Big[\int_t^{t_0}g_0(s)ds\Big]^{\frac{1}{\beta-1}}dt<\infty.$$

但 $g_0 \in C(0,1)$, 故 $\int_t^{t_0} |G(t)|^{\frac{1}{\beta-1}} dt < \infty$. 同理可证 $\int_{t_0}^1 |G(t)|^{\frac{1}{\beta-1}} < \infty$. 故 (1.3) 式成立. 再看问题 (1.1) (ii), 设 x 为解, 则类似地, 当 $0 < t_1 < t_2 < 1$ 时,

$$\Phi(x'(t_1)) - \Phi(x'(t_2)) \geq m \int_{t_1}^{t_2} g_0(s) ds.$$

令 $t_2 \to 1$ 得

$$\int_{t_1}^1 g_0(s) ds < \infty, \quad t_1 \in (0,1), \tag{2.1}$$
$$m \int_{t_1}^1 g_0(s) ds \leq \Phi(x'(t_1)) + \Phi(ax(1)).$$

注意 Φ 及 Φ^{-1} 增, 故 $t \in (0,1)$ 时,

$$\Phi^{-1}(mG(t)) \leq 2^{\frac{1}{\beta-1}} \Phi^{-1}(\max\{\Phi(x'(t)), \Phi(ax(1))\}) \leq 2^{\frac{1}{\beta-1}} \max\{x'(t), ax(1)\}.$$

显然 $\phi'(x) > 0$, $x''(t) < 0$, 故若 $a = 0$ 则 $x'(t) > 0$ 且

$$|G(t)|^{\frac{1}{\beta-1}} \leq \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} x'(t),$$

故 (1.4) 满足. 若 $a > 0$, 则 $x'(1) < 0$. 设 x 在 $t_0 \in (0,1)$ 达最大, 则 $t \in (0, t_0)$ 时 $x'(t) > 0$, $t \in (t_0, 1)$ 时 $x'(t) < 0$, 故

$$|G(t)|^{\frac{1}{\beta-1}} \leq \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} [ax(1) + x'(t)], \quad t \in [0, t_0),$$
$$|G(t)|^{\frac{1}{\beta-1}} \leq \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} ax(1), \quad t \in (t_0, 1).$$

同样 (1.4) 成立.

3 逼近解的存在性

讨论下列逼近问题:

$$(\Phi(x'(t))' + f_n(t, x(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{3.1}$$

其中 $f_n(t,x) = f\big(t, \max\{\frac{1}{n}, x\}\big)$, 作泛函:

$$H(\theta, x) = \int_0^1 \Phi^{-1}(\theta - F_n(s,x)) ds, \tag{3.2}$$

其中 $\theta \in R^1$, $x \in C[0,1]$, $F_n(s,x) = \int_{\frac{1}{2}}^s f_n(u, x(u)) du$. 由 ($\mathrm{H}_1$), ($\mathrm{H}_2$) 知, 若 $x \in C[0,1]$ 且 $x \in P = \{x \in C[0,1] : x(t) \geq 0, t \in [0,1]\}$, 则 $|F_n(s,x)| \leq C|G(s)|$, $C = \max\limits_{[\frac{1}{n}, \|x\|]} \rho(v)$. 因此易知泛函 $H(\theta, x)$ 有意义.

引理 3.1 H 关于 (θ, x) 连续, 关于 θ 严格增.

证明 设 $\theta\to\theta_0$, $x_m\xrightarrow{C}x$. 显然 $\|x_m\|_C$ 有界且

$$\begin{aligned}H(\theta,x_m)-H(\theta_0,x)=&\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}\big\{\Phi^{-1}(\theta-F_n(s,x_m))-\Phi^{-1}(\theta_0,F_n(s,x))\big\}ds\\&+\int_0^\varepsilon\big\{\Phi^{-1}(\theta-F_n(s,x_m))-\Phi^{-1}(\theta_0-F_n(s,x))\big\}ds\\&+\int_{1-\varepsilon}^1\big\{\Phi^{-1}(\theta-F_n(s,x_m))-\Phi^{-1}(\theta_0-F_n(s,x))\big\}ds.\end{aligned}$$

易知

$$\big|\Phi^{-1}(\theta-F_n(s,x))\big|\le 2^{\frac{1}{\beta-1}}\big[\Phi^{-1}(|\theta|)+C^{\frac{1}{\beta-1}}|G(s)|^{\frac{1}{\beta-1}}\big].$$

其中 C 与 θ,x 无关，故

$$\Big|\int_0^\varepsilon\Big|\le 2\int_0^\varepsilon C^{\frac{1}{\beta-1}}|G(s)|^{\frac{1}{\beta-1}}ds+\int_0^\varepsilon\big[\Phi^{-1}(|\theta|)+\Phi^{-1}(|\theta_0|)\big]ds.$$

由 (H_2) 知 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_0^\varepsilon=0$, 同理， $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_{1-\varepsilon}^1=0$, 但在 $s\in[\varepsilon,1-\varepsilon]$ 时 F_n 关于 s,x 连续，从而 $\lim\limits_{\substack{\theta\to\theta_0\\x_m\to x}}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}=0$.

引理 3.2 $H(\theta,x)=0$ 存在唯一根 $\theta=\theta(x)$.

证明 由于 F_n 关于 s 严格增，若 F_n 有上界，则 $\theta\to+\infty$ 时 $H(\theta,x)\to+\infty$. 否则，设 $s\to1$ 时 $F_n(s,x)\to+\infty$, 则令 $\theta=F_n(t,x)$, $\theta\to+\infty$ 时， $t\to1$. 不妨设 $t>\frac12$, 则

$$\int_0^t\Phi^{-1}(\theta-F_n(s,x))ds\ge\int_0^{\frac12}\Phi^{-1}(\theta-F_n(s,x))ds\ge\int_0^{\frac12}\Phi^{-1}(\theta_{\frac12}-F_n(s,x))ds>0,$$

其中 $\theta_{\frac12}=F_n\big(\frac12,x\big)$. 另外，由 $\theta>0$ 时,

$$\begin{aligned}\Big|\int_t^1\Phi^{-1}-F_n(s,x))ds\Big|&=\int_t^1\Phi^{-1}(F_n(s,x)-\theta)ds\\&\le\int_t^1\Phi^{-1}(F_n(s,x))ds\le\int_t^1C^{\frac{1}{\beta-1}}|G(s)|^{\frac{1}{\beta-1}}ds.\end{aligned}$$

故 θ 充分大时可证明 $H(\theta,x)>0$, 同理可证 $\theta\to-\infty$ 时 $H(\theta,x)<0$. 证毕.

引理 3.3 设 (H_1), (H_2') 满足, 则泛函 $H_1(\theta,x)$ 关于 (θ,x) 连续, 关于 θ 单调, 且 $H_1(\theta,x)=0$ 存在唯一解 $\theta_1=\theta_1(x)$. 这里

$$H_1(\theta,x)=\Phi^{-1}(\theta)+a\int_0^1\Phi^{-1}\Big(\theta+\int_s^1f_n(u,x(u))du\Big)ds.$$

证明 详细从略，只需注意下列两式

$$\int_s^1f_n(u,x(u))du\le CG_1(S),\tag{3.3}$$

$$\Phi^{-1}\Big(\theta+\int_s^1f_n(u,x(u))du\Big)\le\Phi^{-1}(|\theta|)+C^{\frac{1}{\beta-1}}|G_1(s)|^{\frac{1}{\beta-1}}.\tag{3.4}$$

以下讨论 (3.1) (i). 恒设 (H_1), (H_2), (H_3), (H_4) 满足. 作:

$$(A_nx)(t)=\int_0^t \Phi^{-1}\Big(\theta(x)-\int_{\frac{1}{2}}^s f_n(u,x(u))du\Big)ds, \tag{3.5}$$

其中 $x\in P$, $\theta(x)$ 由引理 3.2 确定. 易知 $(A_nx)(0)=0$, $(A_nx)(1)=0$, 且 $A_nx\in C[0,1]$. 由于 $H(\theta(x),x)=0$, 则 (3.2) 式中的被积函数有零点, 故必有 t_0 满足 $\theta(x)=\int_{\frac{1}{2}}^{t_0} f_n(u,x(u))du$. 设 $t\in(t_0,1)$, 则 $\theta(x)<\int_{\frac{1}{2}}^t f_n$, 故

$$(A_nx)(1)=0<\int_0^t \Phi^{-1}\Big(\theta(x)-\int_{\frac{1}{2}}^s f_n\Big)ds=(A_nx)(t).$$

而当 $t\in(0,t_0)$ 时, $\theta(x)>\int_{\frac{1}{2}}^t f_n$, 从而 $0<t<1$ 时, $(A_nx)(t)>0$.

引理 3.4 泛函 $\theta(x):P\to R^1$ 连续, 且为有界泛函.

证明 易证 θ 连续, 从略. 下证 θ 将有界集映入有界集. 否则, 设 $x_m\in P$ 有界, 但 $\theta_m=\theta(x_m)\to+\infty$. 由于 $H(\theta_m,x_m)=0$, 故必有 $t_m\in(0,1)$, 使 $\theta_m=F_n(t_m,x_m)$, 因 $\theta_m\to+\infty$d 故 $t_m\to 1$, 设 $\theta_m>0$ 则

$$\begin{aligned}\int_0^{t_m}\Phi^{-1}(\theta_m-F_n(s,x_m))ds&=\int_{t_m}^1\Phi^{-1}(F_n(s,x_m)-\theta_m)ds\\&<\int_{t_m}^1\Phi^{-1}(F_n(s,x_m))ds\to 0.\end{aligned}$$

但当 $t_m>\frac{1}{2}$ 时,

$$\begin{aligned}\int_0^{t_m}\Phi^{-1}(\theta_m-F_n(s,x_m))ds&\geq\int_0^{\frac{1}{2}}\Phi^{-1}(\theta_m-F_n(s,x_m))ds\\&\geq\int_0^{\frac{1}{2}}\Phi^{-1}\Big(\theta_m-F_n\Big(\frac{1}{2},x_m\Big)\Big)ds\\&\geq\frac{1}{2}\Phi^{-1}\Big(\theta_m-C\Big|G\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big|\Big)\to+\infty.\end{aligned}$$

引理 3.5 $A_n:P\to P$ 全连续.

证明 由引理 3.1 的证明及引理 3.4 知 A_n 连续、有界. 而 $\|x\|$ 有界时利用

$$|(A_nx)(t_2)-(A_nx)(t_1)|\leq\bigg|\int_{t_1}^{t_2}\big(\Phi^{-1}(|\theta|)+C^{\frac{1}{\beta-1}}|G(s)|^{\frac{1}{\beta-1}}\big)ds\bigg|,$$

可知 A_n 全连续. (Arzela 定理).

引理 3.6 设 (H_1), (H_2), (H_3), (H_4) 满足, 则问题 (3.1) 及 (i) 对任意 n 有解.

证明 用 λf_n 代替 f_n, $0\leq\lambda\leq 1$, 记由 (3.2) 定义的泛函为 $H(\theta,\lambda,x)$, 而引理 3.2 确定的根为 $\theta(\lambda,x)$, 则由引理 3.1 易知 $H(\theta,\lambda,x)$ 关于 (θ,λ,x) 连续, 且 θ 关于 (λ,x) 连续、有界. 直接验证可知下列不等式成立 ($\varepsilon>0$),

(i) $1<\beta\leq 2$ 时, $\forall x\in R$,

$$\Phi^{-1}(x+\varepsilon)-\Phi^{-1}(x)\geq 2\Phi^{-1}\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big); \tag{3.6}$$

(ii) $\beta>2$ 时， $x\in[a,b]$,

$$\Phi^{-1}(x+\varepsilon)-\Phi^{-1}(x)\geq\min\{\Phi^{-1}(a+\varepsilon)-\Phi^{-1}(a),\Phi^{-1}(b+\varepsilon)-\Phi^{-1}(b)\}. \tag{3.7}$$

下面证明： $\forall\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$, δ 只与 $\varepsilon,n,\theta_1,\theta_2,R$ 有关，使当 $\theta_1\leq\theta\leq\theta_2$, $0\leq\lambda\leq1$, $x\in P$, $\|x\|\leq R$ 时,

$$H(\theta+\varepsilon,\lambda,x)-H(\theta,\lambda,x)\geq\delta. \tag{3.8}$$

事实上，由于

$$\begin{aligned}H(\theta+\varepsilon,\lambda,x)-H(\theta,\lambda,x)&=\int_0^1\Big\{\Phi^{-1}(\theta+\varepsilon-\lambda F_n)-\Phi^{-1}(\theta-\lambda F_n)\Big\}ds\\&>\int_{\frac14}^{\frac12}\Big\{\Phi^{-1}(\theta+\varepsilon-\lambda F_n)-\Phi^{-1}(\theta-\lambda F_n)\Big\}ds,\end{aligned}$$

若 $1<\beta\leq2$, 则由 (3.6) 式得

$$H(\theta+\varepsilon,\lambda,x)-H(\theta,x)\geq\frac12\phi^{-1}\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big);$$

若 $\beta>2$, 则 $\theta_1\leq\theta\leq\theta_2$, $0\leq\lambda\leq1$, $\|x\|\leq R$ 时，对 $s\in\big[\frac14,\frac12\big]$,

$$\theta-\lambda F_n\leq\theta_2+C|G(s)|\leq\theta_2+CM,$$

其中 $M=\sup\limits_{[\frac14,\frac12]}|G(s)|$. 由于同样可得 $\theta-\lambda F_n\geq\theta_1-CM$ 故由 (3.7) 式得

$$\begin{aligned}&H(\theta+\varepsilon,\lambda,x)-H(\theta,x)\geq\frac14\min\Big\{\Phi^{-1}(\theta_2+CM+\varepsilon)-\Phi^{-1}(\theta_2+CM),\\&\quad\Phi^{-1}(\theta_1-CM+\varepsilon)-\Phi^{-1}(\theta_1-CM)\Big\}\overset{\triangle}{=}\delta>0.\end{aligned}$$

下面再证 $\theta(\lambda,x)$ 关于 λ 的连续性，关于 x 在有界范围内一致. 事实上，设 $\varepsilon>0$, 由引理 3.4 及证明易知 $\theta(\lambda,x)$ 是有界泛函，故有 θ_0 使 $|\theta(\lambda,x)|\leq\theta_0$, $0\leq\lambda\leq1$, $\|x\|\leq R$. 由 (3.8) 式知 $H(\theta(\lambda_0,x)+\varepsilon,\lambda_0,x)\geq\overline{\delta}>0$. 再由引理 3.1 及证明知 $\exists\delta>0$, 当 $|\lambda-\lambda_0|<\delta$, $\|x\|<R$ 时， $H(\theta(\lambda_0,x)+\varepsilon,\lambda,x)>0$. 同理可证 $|\lambda-\lambda_0|<\delta$ 时 $H(\theta(\lambda_0,x)-\varepsilon,\lambda,x)<0$, 故必有 $|\theta(\lambda,x)-\theta(\lambda_0,x)|<\varepsilon$.

作算子 N 如下：

$$N(\lambda,x)=\int_0^t\phi^{-1}(\theta(\lambda,x)-\lambda F_n(s,x))ds.$$

由引理 3.5, 对固定 λ, N 关于 x 全连续，且关于 (λ,x) 连续，在 λ_0 关于 λ 的连续性对 $x\in P$, $\|x\|\leq R$ 一致，由 [8] 知 N 全连续. 设 $x\in P$, $x=N(\lambda,x)$, 则易知

$$\begin{cases}-(\Phi(x'(t)))'=\lambda f_n(t,x(t)),\quad 0<t<1,\\x(0)=x(1)=0.\end{cases} \tag{3.9}$$

设 $x(t)$ 在 $t_0\in(0,1)$ 达极大，则 $t\in(0,t_0)$ 时,

$$\Phi(x'(t))\leq\int_t^{t_0}g(s)p(x(s))ds\leq C(1+\|x\|^{\alpha})(C_1+G(t)|),$$

$$x'(t) \le C_2(1+\|x\|^{\frac{\alpha}{\beta-1}})(1+|G(t)|^{\frac{1}{\beta-1}}).$$

积分得 $\|x\| \le C_3(1+\|x\|^{\frac{\alpha}{\beta-1}})$. 由于 $\alpha<\beta-1$, 故 $\|x\|\le K=\mathrm{const}$. 取 $R>K$, 则 $x\in P$. $\|x\|=R$ 时 $x\ne N(\lambda,x)$, 从而

$$i(N(\lambda,x),P\cap B_R,P)=i(A_n,P\cap B_R,P)=i(N(0,x),P\cap B_R,P)=1.$$

证毕.

以下再讨论 (3.1) (ii). 设 (H_1), (H_2'), (H_3), (H_4) 满足，作

$$(B_nx)(t)=\int_0^t \Phi^{-1}\Big(\theta_1(x)+\int_s^1 f_n(u,x(u))ds\Big)ds.$$

类似上面的讨论可知 $B_nx\in C[0,1]$ 且满足边界条件 (ii), 而且 $t\in(0,1)$ 时 $(B_nx)(t)>0$. 设 $H_1(\theta,\lambda,x)$ 及 $\theta_1(\lambda,x)$ 的意义同前类似，则

引理 3.7 泛函 $\theta_1(\lambda,x)$ 关于 (λ,x) 为连续泛函，关于 (λ,x) 为有界泛函，且 $B_n: P\to P$ 全连续.

引理 3.8 问题 (3.1) (ii) 对任意 n 有解.

(证略).

4 定理的证明

引理 4.1 设 (H_1), (H_2), (H_3) 满足，则存在与 n 无关的常数 $R>1$, 使 (3.1) (i) 的解满足

$$0\le x(t)\le R-1,\quad t\in[0,1].$$

证明 设 x 在 $t_0\in(0,1)$ 达最大，不妨设 $\|x\|>1$, 取 $t_1\in(0,t_0)$ 使 $x(t_1)=1$, 则 $t\in[t_1,t_0]$ 时 $x(t)\ge 1$. 由 (3.1) 积分得

$$\Phi(x'(t))\le\int_t^{t_0} g(s)\rho\Big(\max\Big\{\frac{1}{n},x(s)\Big\}\Big)ds\le\int_t^{t_0} Cg(s)(\|x\|^\alpha+1)ds. \tag{4.1}$$

取 $t_2\in(t_0,1)$ 使 $x(t_2)=1$, 则又有 $t\in(t_0,t_2)$ 时,

$$-\Phi(x'(t))\le\int_{t_0}^{t} Cg(s)(\|x\|^\alpha+1)ds. \tag{4.2}$$

若 $t_0\ge\frac{1}{2}$, 由 (4.2) 得

$$-\Phi(x'(t))\le C(\|x\|^\alpha+1)G(t),\quad -x'(t)\le C_1\|x\|^{\frac{\alpha}{\beta-1}}|G(t)|^{\frac{1}{\beta-1}}.$$

故有

$$\|x\|-1\le C_1\|x\|^{\frac{\alpha}{\beta-1}}\int_0^1|G(t)|^{\frac{1}{\beta-1}}dt.$$

利用 $\alpha<\beta-1$ 可知结论成立. 当 $t_0\le\frac{1}{2}$ 时类似. 从略. 证毕.

以下对 $\rho(x)$ 作些技术处理. 设 $R>0$ 由引理 4.1 确定，不妨设 $\rho(x)\ge 1$, $x\in(0,\infty)$ (否则用 $1+\rho$ 代替). 设 $R>2$, 令 $b(x)=\sup\limits_{[x,R]}\rho(u)$, 显然 $b\in C(0,R]$, 且减， $\rho(x)\le b(x)$. 令

$$T(x)=\int_0^x\frac{1}{\Phi^{-1}(b(u))}du.$$

由 (H_4) 知 $T\in C[0,R]$ 且严格增. 由 (H_5) 存在相应于 $H=R$ 的函数 $\psi(t)$, 设 x 是 (3.1) (i) 的解，在 t_0 达最大，则 $t\in(0,t_0)$ 时,

$$\Phi(x'(t))\ge\int_t^{t_0}f\Big(u,\max\Big\{\frac{1}{n},x\Big\}\Big)du\ge\int_t^{t_0}\psi(s)ds,$$
$$x(t)\ge\int_0^t\Phi^{-1}\Big(\int_u^{t_0}\psi(s)ds\Big)du. \tag{4.3}$$

同样 $t\in(t_0,1)$ 时,

$$x(t)\ge\int_t^1\Phi^{-1}\Big(\int_{t_0}^u\psi(s)ds\Big)du. \tag{4.4}$$

引理 4.2 设 (H_1), (H_2), (H_3), (H_4), (H_5) 满足， x 是 (3.1) (i) 的解， t_x^0 是 x 的最大点，则 η 与 n 无关使

$$\eta\le t_x^0\le 1-\eta.$$

证明 否则若有解 x_n 使 $t_{x_n}^0=t_n^0\to 0,1$, 例如 $t_n^0\to 0$, 设 $t_n^0<\frac12$, 则由 (4.6) 及 (H_5) 得

$$\|x_n\|=x\big(t_n^0\big)\ge\int_{\frac12}^1\Phi^{-1}\Big(\int_{\frac12}^u\psi(s)ds\Big)du>0,$$

故可设 $\|x_n\|\to C_0>0$. 由于 $t\in\big(0,t_n^0\big)$ 时 x_n 增，故

$$0<\Phi(x_n'(t))\le\int_t^{t_n^0}g(s)b\Big(\max\Big\{\frac{1}{n},x_n(s)\Big\}\Big)ds\le b(x_n(t))\int_t^{t_n^0}g(s)ds.$$

令 $z_n(t)=T(x_n(t))$, 则 $z_n(0)=0$ 且

$$z_n'(t)\le\Phi^{-1}\Big(\int_t^{t_0^0}g(s)ds\Big)\le\Phi^{-1}(|G(t)|),$$
$$z_n\big(t_n^0\big)\le\int_0^{t_n^0}\Phi^{-1}(|G(t)|)dt\to 0.$$

但 $z_n\big(t_n^0\big)\to T(C_0)>0$, 矛盾.

引理 4.3 设 (H_1)–(H_5) 满足，则存在与 n 无关的常数 $M>0$, 使 (3.1) (i) 的每一解 $x(t)$ 满足:

$$\int_0^1\Big|\frac{d}{dt}T(x(t))\Big|^\omega dt\le M.$$

证明 设 $z(t)=T(x(t))$, 记 $t_x^0=t^0$, 则 $t^0\in[\eta,1-\eta]$. 设 $t\in(0,t^0)$, 则

$$z'(t)\le\Phi^{-1}\Big(\int_t^{t^0}g\Big)\le\Phi^{-1}(C+|G(t)|),$$

$$|z'(t)|^\omega \le C_1(1+|G(t)|^{\frac{\omega}{\beta-1}}), \tag{4.5}$$

其中 C, C_1 与 n 无关. 同理可证 $t\in(t^0,1)$ 时 (4.5) 成立, 合并即得结论.

定理 1.2 的证明 由引理 3.6 设 (3.1) (i) 的解为 x_n. 令 $z_n=T(x_n)$, 则由引理 4.1 及 4.3 利用 Arzela 引理知 z_n 有子列 (仍记为 z_n) $z_n\overset{C}{\to}z$. 令 $x(t)=T^{-1}(z(t))$, 则 $x_n\overset{C}{\to}x$, 从而 $x(0)=x(1)=0$. 由 (4.3) 式, 当 $t\in(0,\eta)$ 时,

$$x_n(t)\ge\int_0^t\Phi^{-1}\Big(\int_u^\eta\psi(s)ds\Big)du.$$

若 $t\in(\eta,t_0)$, 则 $x_n(t)\ge x_n(\eta)$. 再由 (4.4) 式, 当 $t\in(1-\eta,1)$ 时,

$$x_n(t)\ge\int_t^1\Phi^{-1}\Big(\int_{1-\eta}^u\psi(s)ds\Big)du,$$

而 $t\in(t_0,1-\eta)$ 时, $x_n(t)\ge x_n(1-\eta)$. 作

$$x^*(t)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^t\Phi^{-1}\Big(\int_u^\eta\psi(s)ds\Big)du, & t\in(0,\eta);\\ \displaystyle\min\Big\{\int_0^\eta\Phi^{-1}\Big(\int_u^\eta\psi(s)ds\Big)du,\int_{1-\eta}^1\phi^{-1}\Big(\int_{1-\eta}^u\psi(s)ds\Big)du\Big\}, & t\in[\eta,1-\eta];\\ \displaystyle\int_t^1\Phi^{-1}\Big(\int_{1-\eta}^u\psi(s)ds\Big)du, & t\in(1-\eta,1),\end{cases}$$

则 $t\in(0,1)$ 时, $x^*(t)>0$. 固定 $t_1\in(0,1)$, 由 (4.5) 式知 $z_n'(t_1)$ 有界, 故可设 $z_n'(t_1)\to z_0$, 则

$$x_n'(t_1)\to\frac{z_0}{T'(x(t_1))}\triangleq\overline{x}.$$

由 (3.1) 知 $t\in(0,1)$ 时,

$$-\Phi(x_n'(t))+\Phi(x_n'(t_1))=\int_{t_1}^t f\Big(s,\max\Big\{\frac1n,x_n(s)\Big\}\Big)ds,$$

$$x_n(t)-x_n(t_1)=\int_{t_1}^t\Phi^{-1}\Big[\Phi(x_n'(t_1))-\int_{t_1}^t f\Big(s,\max\Big\{\frac1n,x_n\Big\}\Big)ds\Big]dt.$$

在 $[t_1,t]$ 上, $x_n(t)\ge x^*(t)\ge m>0$, 故由 f 的连续性知

$$x(t)-x(t_1)=\int_{t_1}^t\Phi^{-1}\Big[\Phi(\overline{x})-\int_{t_1}^t f(s,x)ds\Big]dt.$$

从而 $(\Phi(x')'=-f(t,x)$. 证毕.

对 (3.1) (ii) 而言, 类似地有下列结论:

引理 4.4 设 (H_1), (H_2'), (H_3), (H_4), (H_5) 满足, 则存在与 n 无关的常数 $R>1$, 使 (3.1) (ii) 的解满足: $0\le x(t)\le R-1$, 且若 t_x^0 是其最大点, 则 $t_x^0\ge\eta$, 其中 $\eta\in(0,1)$ 与 n 无关. 另外, 下列估计成立:

$$\int_0^1\Big|\frac{d}{dt}T(x(t))\Big|^\omega dt\le M,$$

其中 $M = \text{const}$ 与 n 无关.

(证略)

利用此引理类似可证明定理 1.3, 从略. 仅需注意相应的变换函数 x^* 即可.

致谢 作者对审者的意见和建议表示衷心的感谢.

参　考　文　献

[1] O'Regan D. Some existence principle and some general rults for singular nonlinear two point boundary value problems. *J Math Anal Appl,* 1992, **166**: 24–40.
[2] Dunniger *et al.* Existence of solutions for some nonlinear singular BVP. *J. Math Anal Appl,* 1986, **115**: 396–405,
[3] Bobisud *et al.* Solvability of some nonlinear BVP. *Nonl Anal,* 1988, **12**: 855–869.
[4] Gatica J A *et al.* Singular nonlinear BVP for second order ODE. *J Diff Eqs,* 1989, **79**: 62–78.
[5] O'Pegan D. Singular second order BVP. *Nonl Anal,* 1990, **65**: 1097–1109.
[6] O'Regan D. Some general existence principles and results for $(\Phi(y'))' = qf(t,y,y')$. *SIAM J Math Anal,* 1993, **24**: 648–668.
[7] Guo D, Lakshmikantham V. Nonlinear Problems in Abstract Cones. Notes and Reports in Mathematics in Science and Engineering, Vol 5. New York: Academic Press, 1988.
[8] 郭大钧. 非线性泛函分析. 山东科技出版社，济南， 1985 年.

Some Existence Principles for the Singular Second Order Differential Equation $(\Phi(x'))' + f(t,x) = 0$

Liu Xiyu
(*Department of Mathematics, Shandong Normal University, Jinan* 250014, *China*)

Abstract: This paper deals with a class of boundary value problems of ordinary differential equations of second order which have singular right hand term. We will show that there are no solutions when the singularity of $f(t,x)$ with respect to t is greater than a certain value, and solutions exist while the singularity is less than the value. The singularity with respect to u at $u = 0$ is not restricted.

Keywords: singular boundary value problem, approximate solutions, cone