

非线性期望框架下的在险增长 —— G-VaR 方法

王增武

(中国社会科学院金融研究所, 北京 100710)

摘 要 在险增长是稳增长与防风险的一个分析框架, 而稳增长与防风险又是统筹安全与发展的“迷你版本”。作为宏观经济分析新范式构建的一种尝试, 我们利用非线性期望理论研究经济增长均值、方差均不确定的在险增长问题, 非线性期望理论的主要特点或优势在于经济增长波动的“内生刻画”、风险度量的底线思维与区间思维以及数据处理的“单向独立”等。本文的主要边际创新和贡献在于: 1) 理论上从经济增长 G-分布满足的偏微分方程的初值条件的单调和凸凹变化给出 G-顶点分布的解析和定义, 由 G-顶点分布给出 G-在险值 (G-VaR, G-Value-at-Risk) 的刻画; 2) 阐释用 G-VaR 度量在险增长的区间数据思维, 实证检验表明均值、方差不确定的在险增长精度最高且对经济增长的影响最为显著, 给出在险增长走廊的刻画等; 3) 最大波动性与经济增长负相关, 最小波动与经济增长正相关, 经济出现负增长前滚动标准差直线上升, 部分解释现有经济增长领域的“波动性悖论”等。

关键词 非线性期望; G-顶点分布; 在险增长; 波动性悖论

Growth-at-Risk Under the Framework of Nonlinear Expectation — The Approach of G-VaR

WANG Zengwu

(Institute of Finance & Banking, Chinese Academy of Social Sciences, Beijing 100710, China)

Abstract Growth-at-risk is an analysis framework for stabilizing growth and preventing risks, and stabilizing growth and preventing risks are the “mini version” of coordinating safety and development. As an attempt to construct a new paradigm of macroeconomic analysis, we use the theory of nonlinear expectations to study growth-at-risk with uncertain mean and variance. The main feature or advantage of nonlinear expectations lies in the “endogenous characterization” of economic growth

收稿日期: 2022-10-14

作者简介: 王增武, 博士, 副研究员, 研究方向: 宏观金融、金融数学, E-mail: zwwang@amss.ac.cn.
作者衷心感谢审稿人的宝贵意见, 审稿人的真知灼见使拙文更加严谨、更具可读性。当然, 文责自负。

fluctuations, the bottom line thinking and interval thinking of risk measurement, and the “one-direction independence” of data processing. The main innovations and contributions are: Firstly, theoretically, the analysis and definition of the G-vertex distribution is given from the monotonic and convex-concave changes of the initial conditions of the partial differential equation that the economic growth G-distribution satisfies, and the G-vertex distribution gives G-value-at-risk (G-VaR); secondly, explain the interval data thinking of GaR measured by G-VaR, empirical tests show that the accuracy of risk growth is the highest under uncertainty of mean and variance and the most significant impact on economic growth, and the risky growth corridor is given; thirdly, the maximum volatility is negatively correlated with economic growth, and the smallest volatility is positively correlated with economic growth, the rolling standard deviation rises before the negative growth of the economy, which partially explains the “Volatility Paradox” of economic growth.

Keywords nonlinear expectations; G-vertex distribution; growth-at-risk; volatility paradox

1 引言:均值-方差双重不确定性的在险增长

党的二十大报告指出我国进入战略机遇和风险挑战并存、不确定难预料因素增多的时期,各种“黑天鹅”“灰犀牛”事件随时可能发生.党的十九大提出将防范化解重大风险作为三大攻坚战之首,防止发生系统性风险可以说是所有经济工作的底线.十九届五中全会第一次提出统筹安全与发展,把安全提到从未有过的高度.当前和今后一个时期是中国各类矛盾和风险易发期,各种可以预见和难以预见的风险明显增多,安全是发展的前提.因此,必须提高风险意识,树立底线思维.提高风险意识的前提是风险度量, Peng (2004, 2005, 2006, 2019) 提出的非线性期望理论是一致风险度量 (Föllmer and Schied (2016)) 且可刻画随机变量或随机过程的均值不确定性尤其是方差不确定性,这是目前对经济金融波动性不确定性处理的最佳工具.

非线性期望理论在金融尤其是微观金融领域已有应用,参见 Epstein and Ji (2021) 及其引用的文献等,而在经济尤其是宏观经济领域的应用鲜见,张晓晶和王增武 (2021) 利用 Peng et al. (2020) 提出的 G-VaR (G-Value-at-Risk) 研究宏观经济的在险增长问题,文中假定经济增长服从 G-正态分布,即只考虑方差不确定性而未考虑均值不确定性.作为前文的延续,本文我们研究非线性期望框架下均值、方差均不确定的在险增长问题.不同于前文利用已有结论研究在险增长问题的是,本文我们从 G-分布满足的偏微分方程出发,通过初值条件的单调和凹凸等变换给出 G-分布的顶点分布,利用由顶点分布决定的 G-VaR 来研究在险增长问题,这是本文的理论创新.沿着前文的思路,我们可以利用 G-VaR 给出在险增长走廊的刻画,不过,本文的在险增长走廊覆盖前文的在险增长走廊,或说前文的在险增长走廊是本文的在险增长的子集,还可验证,均值方差确定时在险增长度量的精度、均值确定方差不确定时在险增长度量的精度以及均值方差均不确定时在险增长度量的精度逐级提高,即均值和方差不确定时在险增长度量的精度最高且对经济增长的影响最大,这是本文理论模型的实证改进或政策含义.

作为宏观经济分析新范式构建 (张晓晶和刘磊 (2020)) 的一种尝试, 本文利用非线性期望理论处理现有宏观经济理论中对波动性刻画和不足 (Blanchard and Summers (2017)), 主要边际创新有四: 第一, 非线性期望理论可以内生刻画宏观经济现象波动的性质, 而无需假设波动性满足附加的外生条件. 第二, 非线性期望理论可以刻画宏观经济问题的底线思维, 因为次线性期望可以表示成一族概率测度的上确界, 即找到宏观经济问题的极端表现. 第三, 非线性期望理论可以扑捉潜在的经济危机, 因为表示次线性期望的一族概率测度之间是相互奇异的¹. 第四, 在实证分布中, 非线性期望理论数据独立性的要求是“单向的”, 而数学期望框架下对数据独立性的要求则是“双向的”.

本文的主要安排如下: 第二部分是文献综述, 综述非线性期望与在险增长的相关研究成果, 并给出本文与前文的对比等; 第三部分是理论模型, 由 G-分布满足的偏微分方程的特解导出 G-顶点分布, 再由 G-顶点分布导出 G-VaR; 第四部分是实证分析, 给出在险增长走廊的刻画, 并验证参数不确定和在险增长对经济增长的显著性影响, 同时给出在险增长走廊的预测等; 第五部分则是简短的总结及进一步的研究展望等.

2 文献综述: 非线性期望理论与在险增长 GaR

非线性期望理论是处理不确定性尤其是方差不确定性的最佳工具, 原因在于其可构建与传统随机分析理论 (何声武等 (1995)) 并行的非线性随机分析理论 (Peng (2019), 彭实戈 (2017)), 但对不确定性的处理并非纯数学问题, 而是由对经济金融环境的刻画提出的, 或说由对经济金融环境的刻画引起的. 早在 1921 年, 芝加哥学派的创始人奈特 (Knight (1921)) 就指出风险与不确定性是两个完全不同的概念, 从概率论的角度而言, 风险表示我们可以确定状态空间、可以确定状态空间中不同状态发生的可能性, 但无法确定未来具体发生的状态; 不确定性表示我们可以确定状态空间、无法确定状态不同状态发生的可能性, 更无法确定未来具体发生的状态. 换言之, 经济金融环境中的风险可以用唯一的客观概率来刻画, 而我们无法用唯一的客观概率测度来刻画经济金融环境的不确定性, 或只能可用一族客观概率测度来刻画经济金融环境的不确定性. 无独有偶, 作为现代宏观经济的创始人, 凯恩斯在撰写《就业、利息和货币通论》(1936 年, 简称“通论”) 前的专著《A Treatise on Probability》(1921 年) 就是主张利用“主观概率”来刻画经济金融环境的不确定性, “通论”对不确定性的刻画也做了一定的阐释.

从数学运算的角度而言, 主观概率和客观概率的本质区别在于对集函数的运算是否保持加法运算, 前者不可加, 后者可加. 客观概率的可加性表示两个集合的并的概率测度等于两个集合的各自概率测度之和与他们交集的概率测度的差. 因为由客观概率定义的连续随机变量的分布是单增连续函数, 所以可利用 18 世纪构建的微积分理论来处理概率 (连续情形) 问题, 这就是为何柯尔莫哥洛夫在 1933 年建立的概率论的公理化体系得以迅速发展且占领经济金融环境刻画制高点的原因所在. 从风险和不确定性的本质区别而言, 柯尔莫哥洛夫建立的公理

¹相互奇异表示概率测度的支撑集不同, 即存在 $\mathbb{P}_1(A) = 0$ 但 $\mathbb{P}_2(A) > 0$, $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2 \in \mathcal{P}$ 的情形, 其中 \mathbb{P} 为表示次线性期望的概率测度族, \mathbb{P}_1 和 \mathbb{P}_2 表示两个人对同一事件的看法. 如果事件 A 是“经济危机”的话, $\mathbb{P}_1(A) = 0$ 表示一个人认为经济危机不会发生, 而 $\mathbb{P}_2(A) > 0$ 则表示另外一个人认为经济危机会发生, 并不至于“在金融危机面前因集体失声而颜面扫地” (张晓晶和刘磊 (2020)).

化体系是处理经济金融环境中风险的理想工作,而不是处理不确定性的工具,因为客观的概率测度存在唯一. 既然是因为概率测度的可加性才导致概率论不能刻画不确定性,那么是否可以改进或优化测度对集函数的运算呢? 这是继柯尔莫哥洛夫之后诸多学者所做的工作,如去掉可加性保留单调性的 Choquet 容度及其积分理论、基于概率测度变换的扭曲概率理论及其积分以及由一族概率测度表示的最大和最小概率等,参见 Wang and Yan (2007), 王增武 (2012) 及其引文. 从非可加集函数出发刻画不确定性的主要障碍或问题在于其无法刻画不确定性的动态相容性,故不是“内蕴”的,相当于在欧氏空间上定义黎曼流形 (彭实戈 (2017)).

Peng (2004, 2005, 2006, 2019) 跳过集函数的改进,直接从泛函的角度构建非线性期望理论,并将非线性期望下的 G-分布与非线性偏微分方程建立一一对应关系,即非线性期望的数学理论基础是非线性偏微分方程,而非传统的微积分理论,这是非线性数学期望优于数学期望的理论差异所在. 与传统随机分析 (何声武等 (1995)) 平行的对经济金融环境刻画的基本结果都已基本总结在 Peng (2019) 中,如 G-分布的定义和性质、G-布朗运动的定义性质及积分等、由 G-布朗运动驱动的随机微分方程和倒向随机微分方程等以及 G-鞅和 G-鞅表示定理等. 作为 G-分布和 G-布朗运动的补充, Hu and Peng (2021) 给出 G-Lévy 过程的定义和刻画, Nendel (2021) 给出 G-Markov 链的定义和刻画.

非线性期望理论对经济金融不确定性刻画应用主要有如下四个方面: 第一, 经济问题研究, Epstein and Ji (2013, 2014, 2021) 研究方差不确定性下的效用、定价和均衡等相关问题,利用一族随机过程产生的概率测度来刻画方差不确定性,然后将不可在概率论框架下处理的问题转化为可在概率论框架下处理的问题. 第二, 资产定价问题研究, Hu and Ji (2018) 用由 G-布朗运动驱动的随机过程刻画资产价格波动过程,利用由 G-布朗运动驱动的倒向随机微分方程给出未定权益的上 (下) 对冲价格. 第三, 风险度量问题研究, Peng et al. (2023) 基于非线性期望理论给出与在险值 (VaR) 平行的 G-在险值 (G-VaR), Peng and Yang (2020) 建立非线性期望框架下的自回归结果并将其应用于 G-VaR, 进一步的相关研究还有 Peng and Yang (2021), Yang and Yao (2021), 宫晓琳等 (2014, 2015, 2019).

Wang and Yao (2001) 借用金融投资组合中的在险值 VaR (Jorion (2007)) 来刻画在险增长 GaR, 并证明 GaR 与经济下行之间的相关性较高,即可用 GaR 刻画经济下行风险. 刘金全 (2002) 利用 GaR 研究我国经济增长的在险水平和长波态势等. 刘金全和张鹤 (2003) 利用经济增长的绝对离差、条件标准差和 GaR 三种方法度量经济增长风险和条件波动性,结果表明经济波动性与经济增长水平之间存在显著正相关关系. 国际货币基金组织在全球金融稳定报告中用 GaR 衡量金融稳定风险 (IMF (2017)). Adrian et al. (2019) 以宏观经济分析中缺失的“金融”为条件,从条件分布的视角研究经济增长的脆弱性问题. Franta and Gambacorta (2020) 将按揭比率作为金融条件研究在险增长问题. 张晓晶和刘磊 (2020) 将重新构建的中国金融指数作为条件研究金融风险与经济增长,从当期风险概率分布及跨期风险替代两个视角分析了金融环境 (风险) 对经济增长的影响; 经济增长风险需要同时考虑经济增长概率分布的不对称性以及金融对未来经济增长的短期和长期作用不对称性,即“两种不对称性”. 就经济增长的波动性刻画而言, Black (1987) 认为经济波动性同增长水平之间存在正相关关系; Ramsey and Ramsey (1995) 认为经济增长波动性对经济增长有显著的反向影响; 近期的相关研究则表明,经济出现负增长之前的波动率较低,以上可统称为“波动性

悖论”(volatility paradox) (Brunnermeier and Sannikov (2014), Adrian and Boyarchenko (2012)).

与本文密切相关的文献为 Wang and Yao (2001) 以及张晓晶和王增武 (2021), 从分布确定与否的角度而言, Wang and Yao (2001) 考察均值和方差均确定的在险增长问题, 张晓晶和王增武 (2021) 研究均值确定、方差不确定的在险增长问题. 本文我们研究更一般的情形——均值和方差均不确定的在险增长问题, 为此, 我们从经济增长服从的 G-分布满足的偏微分方程的初值条件视角给出 G-分布的顶点分布, 称为 G-顶点分布, 再由 G-顶点分布导出度量在险增长的 G-VaR, 度量结果精度高于与本文密切相关两文的度量精度, 且对经济增长的影响最为显著, 同时还可解释“波动性悖论”, 这是本文与前述两文相比的创新和贡献所在.

3 理论模型: G-分布的顶点分布及其导出的 G-VaR

为考察均值和方差均不确定的在险增长问题, 我们首先从非线性期望框架下 G-分布满足的偏微分方程出发, 通过初值条件的变化来给出 G-分布的特殊分布——G-顶点分布, 由此再给出均值和方差均不确定的在险增长度量 GaR.

3.1 由 G-分布导出 G-顶点分布

给定次线性期望空间 $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$, 彭实戈及其合作者给出最大分布 η 和 G-正态分布 X 的定义 (Peng (2019)), 由 η 与 X 构成的二元组 (X, η) 称为 G-分布, 可证明 (X, η) 是如下 G-方程的解:

$$\partial_t u = G(D_x u, D_{xx}^2 u), u(0, x) = \phi(x), \quad (1)$$

其中 $D_x u = (\partial_{x_i} u)_{i=1}^d, D_{xx}^2 u = (\partial_{x_i x_j}^2 u)_{i,j=1}^d, \phi(x) \in C_{l, lip}(\mathbb{R}^d)$ 为 d -维实数空间上的局部利普希茨函数, 次线性函数 $G: \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}(d) \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为:

$$G(p, A) := \mathbb{E} \left[\frac{1}{2} \langle AX, X \rangle + \langle p, \eta \rangle \right],$$

其中 $\mathbb{S}(d)$ 为 $d \times d$ 维的对称半正定矩阵.

如果我们只考虑 $d = 1$ 的一维情形, 就可以非常直观地给出最大分布、G-正态分布和 G-分布的相关显式表达. 首先, 最大分布 η 的分布为:

$$\eta \stackrel{d}{=} N([\bar{\mu}, \underline{\mu}] \times \{0\}),$$

其中 $\stackrel{d}{=}$ 表示次线性期望下的同分布, 且

$$\bar{\mu} = \mathbb{E}[\eta], \underline{\mu} = -\mathbb{E}[-\eta].$$

其次, G-正态分布 X 的分布为:

$$X \stackrel{d}{=} N(\{0\} \times [\bar{\sigma}^2, \underline{\sigma}^2]),$$

其中

$$\bar{\sigma}^2 = \mathbb{E}[X^2], \underline{\sigma}^2 = -\mathbb{E}[-X^2].$$

由此, 我们理应将 G-分布 (X, η) 写为 $(N(\{0\} \times [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2]), N([\underline{\mu}, \bar{\mu}] \times \{0\}))$, 但为方便后面的对比分析, 我们将其记为 $N([\underline{\mu}, \bar{\mu}] \times [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$, 即

$$(X, \eta) \stackrel{d}{=} N([\underline{\mu}, \bar{\mu}] \times [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2]).$$

与之对应的 G-方程为:

$$\partial_t u = G(\partial_x u, \partial_{xx}^2 u), u(0, x) = \phi(x),$$

其中 $G(p, A) := \mathbb{E}[\frac{1}{2}AX^2 + p\eta]$, 即

$$\partial_t u = \bar{\mu}(\partial_x u)^+ - \underline{\mu}(\partial_x u)^- + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2(\partial_{xx}^2 u)^+ - \frac{1}{2}\underline{\sigma}^2(\partial_{xx}^2 u)^-, u(0, x) = \phi(x). \quad (2)$$

熟知, 当 $\underline{\mu} = \bar{\mu} = \mu$ 以及 $\underline{\sigma} = \bar{\sigma} = \sigma$ 时, G-分布 (X, η) 即为概率框架下均值为 μ 、方差为 σ^2 的正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 这表明正态分布是均值和方差确定的 G-分布. 但反过来的结论并不成立, G-分布并非只是均值不确定和方差不确定的正态分布. 事实上, G-分布覆盖一阶矩在 $\underline{\mu}$ 和 $\bar{\mu}$ 之间、二阶矩在 $\underline{\sigma}^2$ 和 $\bar{\sigma}^2$ 之间的所有分布, 并非只是一阶矩在 $\underline{\mu}$ 和 $\bar{\mu}$ 之间、二阶矩在 $\underline{\sigma}^2$ 和 $\bar{\sigma}^2$ 之间的正态分布.

非线性期望理论的体系完整系统, 但如果我们仅知道分布的矩特征, 并不知分布的具体形式, 此时我们一般无法给出实际应用问题的显式解、数值计算及实证分布等. 这就是 G-分布在实际应用面临的问题所在, 覆盖的范围极广, 但又很难找到实际应用的突破口. 为使 G-分布更好地应用于实际问题, 我们需要给出 G-分布的特殊分布形式. 如前所述, G-分布是 G-方程 (2) 的解, 不同的初值条件对应不同的解, 也就对应不同的 G-分布, 所以要想给出 G-分布的特殊分布形式, 我们就需要从方程的初值条件着手. 根据 G-方程 (2) 的初值条件的单调性和凹凸性可将初值条件划分为表 1 中的四种情形.

表 1 初值条件的四种情形

函数性质	凸函数	凹函数
单调增函数	情形 I	情形 II
单调减函数	情形 III	情形 IV

资料来源: 作者整理.

下面, 我们顺次讨论表 1 中四种情形下对应的 G 分布的特殊分布.

情形 I: 当初值条件为单调增的凸函数时, 即 $\partial_x \phi \geq 0, \partial_{xx}^2 \phi \geq 0$, 我们有 $\partial_x u \geq 0, \partial_{xx}^2 u \geq 0$, 此时, G-方程 (2) 退化为:

$$\partial_t u = \bar{\mu}(\partial_x u)^+ + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2(\partial_{xx}^2 u)^+, u(0, x) = \phi(x). \quad (3)$$

与方程 (3) 对应的 G-分布为:

$$(X, \eta)_I \stackrel{d}{=} N(\{\bar{\mu}\} \times \{\bar{\sigma}^2\}).$$

情形 II: 当初值条件为单调增的凹函数时, 即 $\partial_x \phi \geq 0, \partial_{xx}^2 \phi \leq 0$, 我们有 $\partial_x u \geq 0, \partial_{xx}^2 u \leq 0$, 此时, G-方程 (2) 退化为:

$$\partial_t u = \bar{\mu}(\partial_x u)^+ - \frac{1}{2}\underline{\sigma}^2(\partial_{xx}^2 u)^-, u(0, x) = \phi(x). \quad (4)$$

与方程 (4) 对应的 G-分布为:

$$(X, \eta)_{\text{II}} \stackrel{d}{=} N(\{\bar{\mu}\} \times \{\underline{\sigma}^2\}).$$

情形 III: 当初值条件为单调减的凸函数时, 即 $\partial_x \phi \leq 0$, $\partial_{xx}^2 \phi \geq 0$, 我们有 $\partial_x u \leq 0$, $\partial_{xx}^2 u \geq 0$, 此时, G-方程 (2) 退化为:

$$\partial_t u = -\underline{\mu}(\partial_x u)^- + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2(\partial_{xx}^2 u)^+, u(0, x) = \phi(x). \quad (5)$$

与方程 (5) 对应的 G-分布为:

$$(X, \eta)_{\text{III}} \stackrel{d}{=} N(\{\underline{\mu}\} \times \{\bar{\sigma}^2\}).$$

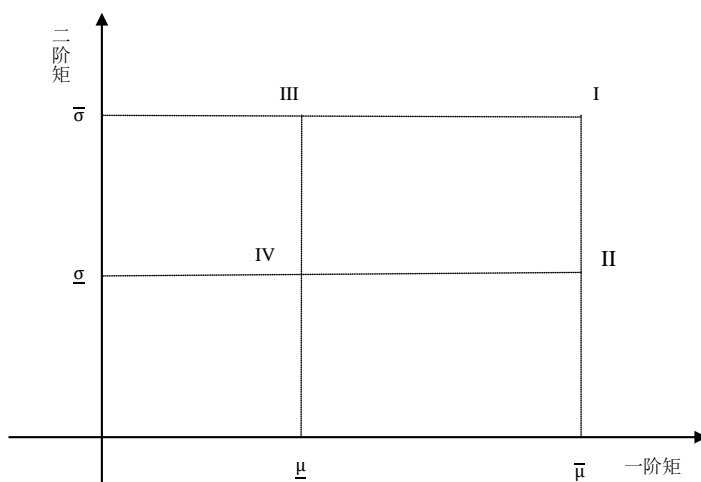
情形 IV: 当初值条件为单调减的凹函数时, 即 $\partial_x \phi \leq 0$, $\partial_{xx}^2 \phi \leq 0$, 我们有 $\partial_x u \leq 0$, $\partial_{xx}^2 u \leq 0$, 此时, G-方程 (2) 退化为:

$$\partial_t u = -\underline{\mu}(\partial_x u)^- - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2(\partial_{xx}^2 u)^-, u(0, x) = \phi(x). \quad (6)$$

与方程 (5) 对应的 G-分布为:

$$(X, \eta)_{\text{IV}} \stackrel{d}{=} N(\{\underline{\mu}\} \times \{\underline{\sigma}^2\}).$$

如前所述, 当均值和方差均为确定常数时, G-分布为正态分布, 所以前述四种分布均为对应参数下的正态分布. 从参数不确定性的角度而言, G-分布覆盖一阶矩在 $\underline{\mu}$ 和 $\bar{\mu}$ 之间、二阶矩在 $\underline{\sigma}^2$ 和 $\bar{\sigma}^2$ 之间的所有分布, 在二维坐标系下的示意图为图 1, 图中为简单起见, 我们假定所有参数均为正. 显见, 前述四种情形下 G-分布对应的参数分别取值于矩形参数空间的四个顶点 (图 1), 所以我们可将前述四种 G-分布的特殊分布称为 G-顶点分布, 每个顶点的分布均为正态分布.



资料来源: 作者整理.

图 1 参数不确定性视角下 G-分布的特殊分布对应

以上, 我们 G-方程的视角给出 G-顶点分布的刻画, 即由 G-分布导出 G-顶点分布, 相关结果总结为如下的命题 1.

命题 1 (G-顶点分布) 与 G-分布 $(X, \eta)X \stackrel{d}{=} N([\underline{\mu}, \underline{\mu}] \times [\underline{\sigma}^2, \underline{\sigma}^2])$ 对应的 G-顶点分布分别为 $(X, \eta)_I \stackrel{d}{=} N(\{\underline{\mu}\} \times \{\underline{\sigma}^2\})$ 、 $(X, \eta)_{II} \stackrel{d}{=} N(\{\underline{\mu}\} \times \{\underline{\sigma}^2\})$ 、 $(X, \eta)_{III} \stackrel{d}{=} N(\{\underline{\mu}\} \times \{\underline{\sigma}^2\})$ 和 $(X, \eta)_{IV} \stackrel{d}{=} N(\{\underline{\mu}\} \times \{\underline{\sigma}^2\})$, 对方的 G-方程分别为 (3)、(4)、(5) 和 (6).

3.2 由 G-顶点分布导出的 G-VaR

熟知, 正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的 VaR 为:

$$\text{VaR}_\alpha = \mu - \sigma \Phi^{-1}(\alpha),$$

其中 α 为给定的置信水平. 因为 G-顶点分布为正态分布, 所以由 G-顶点分布导出的 G-VaR 顺次为:

$$\text{G-VaR}_\alpha^I = \text{G-VaR}_\alpha((X, \eta)_I) = \underline{\mu} - \underline{\sigma} \Phi^{-1}(\alpha), \quad (7)$$

$$\text{G-VaR}_\alpha^{II} = \text{G-VaR}_\alpha((X, \eta)_{II}) = \underline{\mu} - \underline{\sigma} \Phi^{-1}(\alpha), \quad (8)$$

$$\text{G-VaR}_\alpha^{III} = \text{G-VaR}_\alpha((X, \eta)_{III}) = \underline{\mu} - \underline{\sigma} \Phi^{-1}(\alpha), \quad (9)$$

$$\text{G-VaR}_\alpha^{IV} = \text{G-VaR}_\alpha((X, \eta)_{IV}) = \underline{\mu} - \underline{\sigma} \Phi^{-1}(\alpha). \quad (10)$$

进一步, 如果我们记 $\text{G-VaR}_\alpha^{\max}$ 和 $\text{G-VaR}_\alpha^{\min}$ 分别为前述 G-VaR 中的最大者和最小者, 即

$$\begin{aligned} \text{G-VaR}_\alpha^{\max} &= \max \{ \text{G-VaR}_\alpha^I, \text{G-VaR}_\alpha^{II}, \text{G-VaR}_\alpha^{III}, \text{G-VaR}_\alpha^{IV} \}, \\ \text{G-VaR}_\alpha^{\min} &= \min \{ \text{G-VaR}_\alpha^I, \text{G-VaR}_\alpha^{II}, \text{G-VaR}_\alpha^{III}, \text{G-VaR}_\alpha^{IV} \}. \end{aligned}$$

则称由他们构成的区间为 G-VaR 走廊 G-VaR_α^{rc} , 即

$$\text{G-VaR}_\alpha^{rc} = [\text{G-VaR}_\alpha^{\min}, \text{G-VaR}_\alpha^{\max}].$$

以上, 我们由 G-顶点分布导出 G-VaR, 并给出风险走廊的刻画, 相关结论总结为如下的命题 2.

命题 2 由 G-顶点分布导出的 G-VaR 分别为由 (7)~(10) 定义 $\text{G-VaR}_\alpha^I, \text{G-VaR}_\alpha^{II}, \text{G-VaR}_\alpha^{III}$ 和 G-VaR_α^{IV} , 其最值构成 G-VaR 走廊 $\text{G-VaR}_\alpha^{rc} = [\text{G-VaR}_\alpha^{\min}, \text{G-VaR}_\alpha^{\max}]$.

至此, 我们由 G-分布导出 G-顶点分布, 再由 G-顶点分布导出 G-VaR 和 G-VaR_α^{rc} , 所有这些的出发点是 G-方程的初值条件的变化, 即表 1, 我们将命题 1 和命题 2 的相关结论纳入表 1 后得到的表 2 即本节理论模型的主要结果.

4 实证分析: 用 G-VaR 度量在险增长 GaR

上一节, 我们主要给出 G-VaR 的理论推导, 作为上一节的延续, 本节我们首先阐释一下用 G-VaR 度量 GaR 的区间数据思维, 然后再比较用 G-VaR 度量 GaR 与其他风险度量之间的精度, 再看不确定性参数和 GaR 对经济增长的显著性影响, 最后则是非线性期望框架下在险增长走廊的预测分析等.

表 2 与初值条件对应的 G-顶点分布和 G-VaR

函数性质	凸函数	凹函数
单调增函数	$(X, \eta)_I \stackrel{d}{=} N(\{\bar{\mu}\} \times \{\bar{\sigma}^2\})$ $G\text{-VaR}_\alpha^I = \bar{\mu} - \bar{\sigma}\Phi^{-1}(\alpha)$	$(X, \eta)_{II} \stackrel{d}{=} N(\{\bar{\mu}\} \times \{\bar{\sigma}^2\})$ $G\text{-VaR}_\alpha^{II} = \bar{\mu} - \underline{\sigma}\Phi^{-1}(\alpha)$
单调减函数	$(X, \eta)_{III} \stackrel{d}{=} N(\{\underline{\mu}\} \times \{\bar{\sigma}^2\})$ $G\text{-VaR}_\alpha^{III} = \underline{\mu} - \bar{\sigma}\Phi^{-1}(\alpha)$	$(X, \eta)_{IV} \stackrel{d}{=} N(\{\underline{\mu}\} \times \{\underline{\sigma}^2\})$ $G\text{-VaR}_\alpha^{IV} = \underline{\mu} - \underline{\sigma}\Phi^{-1}(\alpha)$

资料来源: 作者整理.

4.1 由 G-VaR 度量 GaR 的区间数据思维

为阐释非线性期望框架下 GaR 的区间数据思维, 我们从传统概率框架下 VaR 对 GaR 的度量说起. 假定经济增长服从正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则在险增长 GaR 的 VaR 风险度量为:

$$\text{GaR}_\alpha(X) = \mu - \sigma\Phi^{-1}(\alpha),$$

其中 μ 为预期的经济增长水平, $-\sigma\Phi^{-1}(\alpha)$ 刻画经济增长在置信水平 α 下与预期增长水平的偏离度, 或说经济增长在置信水平 α 下的最大下行幅度. 从在险增长的角度而言, 可以对 GaR_α 作两个维度的解释: 一是在给定的置信水平 α 下, 经济增长的最大下行幅度为 $\sigma\Phi^{-1}(\alpha)$, 或说经济增长下行幅度超过 $\sigma\Phi^{-1}(\alpha)$ 的可能性不超过 α , 即经济增长的风险水平; 二是要想保证预期的经济增长水平 μ , 为应对潜在的经济下行风险, 我们需要有保证经济增长不低于 $\mu - \sigma\Phi^{-1}(\alpha)$ 的潜在能力. 这儿, 我们假定经济增长服从均值和方差确定的正态分布, GaR_α 就表示均值和方差均确定的在险增长度量.

由命题 1 知 G-顶点分布是正态分布, 所以由 G-顶点分布导出的 G-VaR 的在险增长度量含义同前述用 VaR 度量在险增长, 一是给出经济增长的下行风险测算, 二是给出防范经济下行风险的潜在增速测算, 差别只是在于经济增长遵循的分布的参数确定与否. 四个 G-顶点分布对应四个不同的在险增长值, 在险增长值中的最小者 (与 $G\text{-VaR}_\alpha^{\min}$ 对应的 GaR_α^{\min}) 和最大者 (与 $G\text{-VaR}_\alpha^{\max}$ 对应的 GaR_α^{\max}) 就构成了在险增长区间, 这是与用 VaR 度量在险增长“点思维”不同的“区间数据思维”, 而这是由其经济增长分布的均值和方差不确定所刻画的. 这其中, 我们隐含着记 GaR_α^{\max} 和 GaR_α^{\min} 分别为经济增长分布均值和方差均不确定时在险增长的上限和下限. 非线性期望框架下在险增长度量的经济含义为如果决策者预期的经济增长水平为 $[\underline{\mu}, \bar{\mu}]$, 为防范经济下行风险, 决策者需要有保证经济增长落于在险增长走廊 $[\text{GaR}_\alpha^{\min}, \text{GaR}_\alpha^{\max}]$ 内的能力 (命题 2). 特别地, 如果我们以在险增长走廊与预期经济增长区间的对应差 (两个端点的差) 即 $[\text{GaR}_\alpha^{\min} - \underline{\mu}, \text{GaR}_\alpha^{\max} - \bar{\mu}]$, 作为经济增长下行风险度量的一种方式, 那么我们就可得到与前述经典结果对应的相关讨论.

质言之, 与用 VaR 度量在险增长的“点数据思维”相比, 用 G-VaR 度量在险增长 GaR 的好处或优势在于区间数据思维, 一是给出经济增长下行风险的区间刻画, 如经济增长的某个下行风险区间为 $[\text{GaR}_\alpha^{\min} - \underline{\mu}, \text{GaR}_\alpha^{\max} - \bar{\mu}]$; 二是要想保证经济增长落于预期的增长水平区间 $[\underline{\mu}, \bar{\mu}]$ 内, 决策者需要有保障经济增长水平落于 $[\text{GaR}_\alpha^{\min}, \text{GaR}_\alpha^{\max}]$ 内的能力, 以防范经济增长的下行风险.

4.2 G-VaR 提高了 VaR 等度量 GaR 的精度

上一节,我们从“点数据”思维到“区间数据”思维转换的视角阐释 G-VaR 与 VaR 相比度量在险增长的优势所在.本节,我们要验证非线性期望框架下的在险增长度量精度是否提高?为做相关的实证分析,我们首先需要对 G-顶点分布中的相关参数进行估计,采用非线性期望框架下的 ϕ -max-min 参数估计方法 (Jin and Peng (2021), 彭实戈 (2017)), 其中最重要的一步就是样本的分组问题, Peng et al. (2020) 给出分组的一个标准选择.

下面,我们以我国的经济增长数据为样本,先对我国的经济增长阶段进行划分.过往研究中,刘树成 (2000) 用“谷-谷”分法,将 1953 年到 1998 年这 46 年间的经济增长划分为 9 轮波动;刘金全 (2002) 从供给单因素驱动阶段、供给和需求双因素驱动阶段以及需求单因素阶段等经济增长的驱动因素维度将 1978 年至 2002 年的经济发展分为三个阶段.2021 年是十四五规划的开启之年,面对中华民族伟大复兴的战略布局和世界百年未有之大变局,经济增长前景的不确定性和潜在下行风险均前所未有,所以我们以五年为时间间隔对 1992 年 3 月以来的季度经济增长数据进行划分,计算经济增长五年跨度²的滚动均值、滚动均值的平均值 (平均均值)、滚动均值的最小值 (最小均值) 和滚动均值的最大值 (最大均值) 等均值指标,计算经济增长五年跨度的滚动标准差、滚动标准差的平均值 (平均标准差)、滚动标准差的最小值 (最小标准差) 和滚动标准差的平均值 (最大标准差) 等波动性指标,即参数估计,详见表 3 中的上半部分.

在表 3 中的下半部分中我们记 GaR_α^σ 为张晓晶和王增武 (2021) 的在险增长水平,显见

$$\text{GaR}_\alpha^{\max} \geq \text{GaR}_\alpha^\sigma \geq \text{GaR}_\alpha \geq \text{GaR}_\alpha^{\min}.$$

这表明经济增长分布均值和方差均不确定时的在险增长度量精度优于经济增长分布均值确定、方差不确定时的在险增长度量,后者又优于经济增长分布确定时的在险增长度量,也就是说均值和方差均不确定时的在险增长度量精度最高,相关时序数据参见图 2,与命题 2 对应的在险增长走廊 $[\text{GaR}_\alpha^{\min}, \text{GaR}_\alpha^{\max}]$ 时序数据参见图 3.

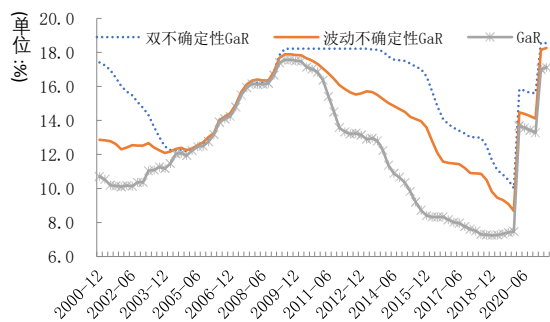
最后,我们再从区间数据的视角对表 3 中的结果做进一步的阐释.以 2020 年 12 月的相关数据为例,参数估计中最小均值和最大均值构成的均值区间 $[5.47, 7.63]$ 可看成我们对经济增长的预期区间,结合波动性参数估计的区间 $[0.14, 3.43]$,利用命题 1 和命题 2,我们可计算出在险增长走廊 $[5.52, 15.61]$,经济含义表示为应对潜在的经济下行风险并保证经济增长水平落于 $[5.47, 7.63]$ 内,决策层需要有保障经济增长水平落在 $[5.52, 15.61]$ 的能力.进一步,在险增长走廊 $[5.52, 15.61]$ 与预期区间 $[5.47, 7.63]$ 的差的区间 $[0.05, 7.98]$ 为经济增长的下行风险区间.利用经济增长的下行风险区间,我们可以对任意的预期增长水平进行调整,2023 年部分地方政府在其政府工作报告中以区间数据的思维公布其经济增长预期,如吉林、甘肃和黑龙江等公布其经济增长预期为 6% 左右 (表 4).如果我们将 6% 左右具化为 $[5.5\%, 6.5\%]$,如以 $[0.05\%, 7.98\%]$ 为经济增长下行风险的参考区间,那么吉林、甘肃和黑龙江等就需要有保障经济增长水平落于经济增长区间 $[5.55\%, 14.48\%]$ 内的能力,这是经济增长下行风险区间的功能所在.

²具体的时间区间划分如下: 1992 年 3 月到 2000 年 12 月、2000 年 1 月到 2005 年 12 月、2006 年 1 月到 2010 年 12 月、2011 年 1 月到 2015 年 12 月以及 2016 年 1 月到 2020 年 12 月等.

表 3 经济增长观察区间末的参数估计和在险增长计算结果

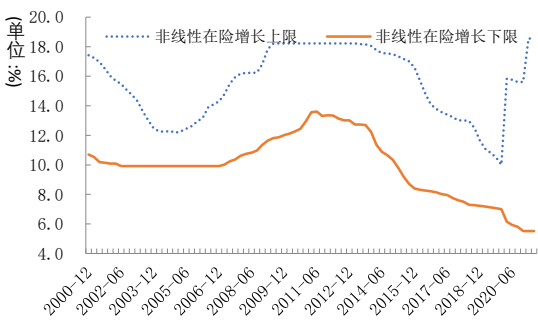
时间	2000 年 12 月	2005 年 12 月	2010 年 12 月	2015 年 12 月	2020 年 12 月
参数估计					
经济增长	7.50	12.40	9.90	6.90	4.90
滚动均值	8.35	10.18	10.99	7.51	5.47
最小均值	8.35	8.12	10.18	7.51	5.47
最大均值	13.08	10.18	12.19	10.99	7.63
滚动标准差	1.01	1.11	2.51	0.38	3.42
最小标准差	1.01	0.77	1.12	0.38	0.14
最大标准差	1.86	1.19	2.62	2.40	3.43
在险增长					
GaR_{α}^{\max}	17.41	12.94	18.21	16.59	15.61
GaR_{α}^{σ}	12.86	13.03	17.32	13.58	14.10
GaR_{α}	10.71	12.75	16.84	8.40	13.28
GaR_{α}^{\min}	10.71	9.92	12.95	8.40	5.52

资料来源: 作者整理, 单位为百分比.



资料来源: 作者整理.

图 2 GaR_{α}^{\min} 、 GaR_{α}^{σ} 和 GaR_{α} 的时序数据表现



资料来源: 作者整理.

图 3 在险增长走廊的时序数据表现

表 4 部分地方政府工作报告中的 2023 年经济增长预期

经济增长目标	地区
6% 左右	吉林、甘肃、黑龙江、山西、内蒙古、云南、福建、河北、四川、贵州、重庆、河南
6.5% 左右	安徽、宁夏、湖南、湖北
7% 左右	江西、新疆
8% 左右	西藏
9% 左右	海南
5% 以上 (或左右)	浙江、山东、广东、江苏

资料来源: 作者基于公开资料整理, 排序不分先后.

4.3 分布不确定性对经济增长影响的显著性检验

同用概率论框架下的正态分布描述经济增长相比,用非线性期望框架下的 G-分布描述经济增长的最大不同在于其均值和波动性参数的不确定性,即分布不确定性.下面,我们首先检验分布不确定性的参数对经济增长影响的显著性,由表 5 显见,同时存在均值不确定和方差不确定性时,各个参数对经济增长的影响都不显著;均值确定、方差不确定时,方差不确定性对经济增长的影响不显著;方差确定、均值不确定时,最小均值经济增长的影响显著,其经济含义我们对经济增长的预期水平的底线对经济增长的影响显著,或说预期底线对经济增长的影响显著,1 单位的底线变动,将引起 1.19 个经济增长单位的同向变动.最后,如果只存在方差不确定性,则最小标准差和最大标准差对经济增长的影响均显著,其中最小标准差的变动将引起经济增长的同向变动,而最大标准差的变动将引起经济增长的反向变动,即 1 单位最小标准差的增加将会引起经济增长下滑 1 个单位.这一方面回应了 Ramsey and Ramsey(1995), Black et al. (1987) 研究矛盾的问题——最小标准差与经济增长正相关、最大标准差与经济增长负相关.另一方面表明从用波动性度量经济增长风险的角度而言,我们需要密切观察最大标准差的波动而不是最小标准差的波动.

接着,我们检验分布不确定性的在险增长对经济增长的影响.如前所述,

$$\text{GaR}_{\alpha}^{\max} \geq \text{GaR}_{\alpha}^{\sigma} \geq \text{GaR}_{\alpha} \geq \text{GaR}_{\alpha}^{\min},$$

其中 $\text{GaR}_{\alpha}^{\max}$, $\text{GaR}_{\alpha}^{\sigma}$ 和 GaR_{α} 分别对应于均值方差都不确定性、均值确定方差不确定性以及均值方差都确定下的在险增长.由表 6 显见, $\text{GaR}_{\alpha}^{\max}$, $\text{GaR}_{\alpha}^{\sigma}$ 和 GaR_{α} 对经济增长的影响均显著,的变动将引起经济增长 0.40 单位的同向变化、1 单位 $\text{GaR}_{\alpha}^{\sigma}$ 的变动将引起经济增长 0.52 单位的同向变化、其中 1 单位 $\text{GaR}_{\alpha}^{\max}$ 的变动将引起经济增长 1.13 单

表 5 经济增长对其分布不确定性参数的回归结果

	被解释变量: 经济增长			
	(1)	(2)	(3)	(4)
最小均值	0.906 (0.864)		1.188*** (0.544)	
最大均值	-0.0626 (0.432)		-0.179 (0.423)	
最小标准差	0.383 (2.164)	-1.414 (0.957)		2.563*** (0.774)
最大标准差	-0.722 (0.500)	-1.148 (0.392)		-1.006*** (0.427)
滚动均值		1.252*** (0.220)		
常数项	3.237 (5.387)	-1.055 (1.933)	1.023 (2.402)	8.788*** (1.029)
观测值	83	83	83	83
R^2	0.165	0.399	0.139	0.152

注: *, **, *** 分别表示 10%、5% 和 1% 的显著性水平.

表 6 经济增长对分布不确定性下 GaR 的回归结果

	被解释变量: 经济增长			
	(1)	(2)	(3)	(4)
GaR	0.395*** (0.104)			0.195 (0.598)
GaR $^{\sigma}$		0.519** (0.225)		-0.219 (0.218)
GaR $^{\max}$			1.130*** (0.286)	1.197** (0.503)
GaR $^{\min}$			-0.216 (0.160)	-0.288 (0.300)
常数项	3.222*** (1.338)	3.584 (2.437)	1.988 (1.377)	1.942 (2.002)
观测值	83	83	83	83
R ²	0.091	0.121	0.399	0.415

注: *, **, *** 分别表示 10%、5% 和 1% 的显著性水平。

位的同向变化, 这表明为保证预期的经济增长速度, 随着在险增长度量精度 GaR_{α} , $\text{GaR}_{\alpha}^{\sigma}$ 和 $\text{GaR}_{\alpha}^{\max}$ 的逐级提高, 我们需要有更高的经济增长的保障能力, 以应对经济增长分布不确定性风险。最后, 如果我们看四个在险增长指标对经济增长影响的显著性检验结果, 可以发现只有 $\text{GaR}_{\alpha}^{\max}$ 对经济增长的影响显著, 再次佐证 $\text{GaR}_{\alpha}^{\max}$ 是所有在险增长度量中精度最高的一个。

4.4 在险增长 GaR 的预测分析

以上, 我们从非线性期望版本下分布不确定时 GaR 的区间数据思维、分布不确定性参数对经济增长影响的显著性检验以及分布确定时 GaR 对经济增长影响的显著性检验等维度对相关数据结果进行了分析。本节, 我们着眼于在险增长 GaR 的预测分析, 重点是 $\text{GaR}_{\alpha}^{\min}$ 和 $\text{GaR}_{\alpha}^{\max}$ 的预测分析, 因为两者构成覆盖其他在险增长的在险增长走廊且 $\text{GaR}_{\alpha}^{\max}$ 是所有在险增长指标中精度最高的那个。为给出 $\text{GaR}_{\alpha}^{\min}$ 和 $\text{GaR}_{\alpha}^{\max}$ 的预测分析, 我们首先应该均值区间参数和标准差区间参数的估计, 有两个思路, 一种是通过预测滚动均值和滚动方差来预测均值区间参数和标准差区间参数的估计, 另一种是直接预测均值区间参数和标准差区间参数。为减少二次估计的误差, 我们选择第二种思路, 分别用最小均值的一阶滞后预测最小均值、最大均值的一阶滞后预测最大均值、最小标准差的一阶滞后预测最小标准差以及最大标准差的一阶滞后预测最大标准差, 结果见表 7。

以 2022 年 12 月末的均值区间 [4.71, 7.05] 和标准差区间 [0.14, 4.95] 为基准, 利用表 5 的一阶自回归结果可预测下一期 (2023 年 3 月末) 的均值区间和标准差区间分别为 [4.56, 6.94] 和 [0.13, 4.94], 由此导出的在险增长走廊为 [4.87, 18.43], 蕴含的经济含义为如果决策层预期的经济增长水平在 4.56% 和 6.94% 之间, 那么为应对潜在的经济下行风险, 就要有保障经济增长落在区间 4.87% 和 18.43% 的能力。如前所述, 在险增长走廊与均值区间的差值即为经

表 7 参数不确定性的一阶自回归结果

	被解释变量				
	最小均值	最大均值	最小标准差	最大标准差	滚动标准差
最小均值的一阶滞后	1.302*** (0.0193)				
最大均值的一阶滞后		1.010*** (0.00921)			
最小标准差的一阶滞后			1.002*** (0.0168)		
最大标准差的一阶滞后				0.984*** (0.0894)	
滚动标准差的一阶滞后					0.999*** (0.0603)
常数项	-0.302* (0.157)	-0.182* (0.101)	-0.0123 (0.0100)	0.0682 (0.200)	0.0469 (0.105)
观测值	82	82	82	82	82
R^2	0.985	0.987	0.980	0.816	0.854

注: *, **, *** 分别表示 10%、5% 和 1% 的显著性水平。

经济增长的下行风险区间, 显见, 下一期的经济增长下行风险区间为 [0.31, 11.49], 即经济下行幅度将不低于 0.31%, 但也不高于 11.49%。这一结论在实践中非常有用, 如果决策层对下一期的经济增长预期不是 [4.56, 6.94], 而是确定的数如 6%, 那么要想保证 6% 的预期增长水平, 为应对潜在的经济下行风险, 我们就要有保证经济增长落在 6.31% 和 17.49% 的能力, 否则, 经济增长最高可能不超过 5.69%, 最差可能下滑至 -5.49%。

最后, 我们介绍一个有意思的结果: 以本次的新冠疫情冲击为例, 2020 年第一季度中国经济增长的下滑幅度为 6.8%, 2018 年 6 月至 2019 年 12 月间最小标准差与最大标准差均呈下降趋势, 这与波动性悖论之“经济出现负增长前波动率较低”相容; 而滚动标准差则从 0.14% 一路上升到 2019 年 12 月末的 0.34%, 此与波动性悖论之“经济出现负增长前波动率较低”矛盾, 滚动标准差的这个表现可以看成是对波动性悖论的一种解释。如果我们以美国的数据表现为标准, 利用同样的计算思路, 也可得到相同的结论, 其中 2008 年 12 月和 2020 年 6 月美国经济出现负增长之前的滚动标准差均呈现明显的上升态势, 再者, 2008 年 12 月这次, 经济增长的滚动标准差由 2006 年 12 月的 0.76% 直线上升到 2008 年 9 月的 1.09%, 又如 2020 年 6 月这次, 滚动标准差从 2019 年 6 月起保持 0.54% 稳步不变, 2020 年 3 月跳跃到 0.73%。这表明, 滚动标准差在预警经济负增长方面或具有一定的稳健性, 或可将“滚动标准差”的持续上升看成是“经济出现负增长”的先行指标。沿着这一思路, 由滚动标准的一阶自回归结果知 (表 7), 下一期 (2023 年 3 月末) 的滚动标准差为 4.99%, 前期已从 2020 年 9 月的 3.42% 上升到 2022 年 12 月的 4.94%, 即滚动标准差自 2020 年 9 月以来处于持续上升态势, 潜在的经济下行风险不容忽视, 这表明中国经济增长的前景“稳中有忧”。

5 结语: 简短总结及研究展望

本文, 我们研究非线性期望框架下均值、方差均不确定的在险增长问题, 改进原有只考虑方差不确定和均值、方差均确定的情形. 理论上的主要贡献在于自上而下从非线性期望满足的偏微分方程的初值条件的单调和凹凸变换视角给出其解的特殊形式, 而不是由下至上从正态分布构造一族概率测度来表示非线性期望, 定义与偏微分方程解的特殊形式对应的分布为 G-分布的顶点分布, 利用顶点分布给出非线性期望框架下与 VaR 对应的 G-VaR. 政策或实证方面的主要贡献在于: 第一, 将过去利用 VaR 度量在险增长 GaR 的点数据思维提升为利用 G-VaR 度量 GaR 的区间数据思维; 第二, 均值和方差均不确定下的 GaR 的精度优于均值确定、方差不确定性的 GaR, 后者优于均值和方差确定的 GaR, 即均值和方差不确定时 GaR 精度最高的一个也是对经济增长影响最大的一个; 第三, 利用均值和方差不确定性的 GaR, 我们可给出经济增长的在险增长走廊, 即经济增长下行风险的下界和上界, 我们还可用一阶自回归分析给出在险增长走廊的预测分析; 第四, 最大波动性与经济增长负相关, 最小波动与经济增长正相关, 经济出现负增长前滚动标准差直线上升, 部分解释现有经济增长领域的“波动性悖论”等.

作为宏观经济分析新范式构建的尝试, 本文利用非线性期望理论研究均值和方差均不确定时的在险增长问题. 在理论模型一节, 我们直接假定经济增长服从 G-分布, 这是个非常强的假设条件. 从学理的角度而言, 我们应从假设检验的视角验证经济增长是否服从 G-分布, 如果服从, 则可使用 G-分布来刻画经济增长. 否则, 我们需要探寻其他思路, 如在非参数估计框架下 (孙志华等 (2016)) 构造非线性期望框架下的核函数, 如 G-Gaussian 核函数等, 这有待于进一步的研究拓展. 在实证分析一节, 我们利用 1992 年以来的季度经济增长数据, 虽对要说明问题的结论没有影响, 但数据长度较短, 这可能是本文有待进一步研究改进的第二个问题.

传统概率框架下, GARCH 模型、方差-Gamma 模型以及随机波动模型等 (严加安 (2012)) 以及 Denis and Martini (2016) 的等价鞅测度概率族等都对波动性不确定性的处理做了早期尝试. 陈增敬老师及其合作者 (Chen and Epstein (2022), Chen, Epstein and Zhang (2023)) 等从转移概率的角度给出波动不确定性的刻画及应用. Hansen 及其合作者 (Hansen (2014), Hansen (2022), Chen et al. (2021)) 通过优化问题确定概率族的最优概率测度, 如 Hansen (2021) 处理方差不确定时的约束条件是均值固定, 允许方差波动, 通过优化问题求出满足约束条件的最优概率测度. 以静态为例, 这只是 G-分布的特殊情形, 因为 G-分布覆盖一阶矩在 $\underline{\mu}$ 和 $\bar{\mu}$ 之间、二阶矩在 $\underline{\sigma}^2$ 和 $\bar{\sigma}^2$ 之间的所有分布, 即 G-分布可同时考虑均值不确定性和方差不确定性. 对均值确定、波动不确定的 G-正态分布而言, 由 Peng (2019) 中的命题 2.2.15 知当初值条件 ϕ 为凸函数或凹函数时, 可以显示求解非线性期望. 当 ϕ 为凸函数时, 非线性期望就是由正态分布 $N(\mu, \sigma)$ 生成的概率测度下的数学期望, 也是最优问题的解 (定理 1.2.1, Peng (2019)). 这表明以上这些对波动性处理的研究或都可看成非线性期望理论的特殊或变通形式. 一个自然的问题是 Hansen 等人从经济学出发的相关研究在理论上是否都可用非线性期望理论研究, 或还有更多的经济含义与经济解释, 这或是构建宏观经济新范式非常值得关注的研究方向.

参 考 文 献

- 宫晓琳, 陈增敬, 张晓朴, 杨淑振, (2014). 随机极限正态分布与审慎风险监测 [J]. 经济研究, 49(9): 135–148.
Gong X L, Chen Z J, Zhang X P, Yang S Z, (2014). Measuring and Management Risk with Random Limit Distribution[J]. The Economic Journal, 49(9): 135–148.
- 宫晓琳, 杨淑振, 胡金炎, 张宁, (2015). 非线性期望理论与基于模型不确定性的风险度量 [J]. 经济研究, 50(11): 133–147.
Gong X L, Yang S Z, Hu J Y, Zhang N, (2015). Non-linear Expectation Thoery and Risk Measurment Based on Model Ambiguity[J]. The Economic Journal, 50(11): 133–147.
- 宫晓琳, 彭实戈, 杨淑振, 孙怡青, 杭晓愈, (2019). 基于不确定性分布的金融风险审慎管理研究 [J]. 经济研究, 54(7): 64–77.
Gong X L, Peng S G, Yang S Z, Sun Y Q, Hang X Y, (2019). Prudential Management of Financial Risk with Uncertain Probability Distribution[J]. The Economic Journal, 54(7): 64–77.
- 刘金全, (2002). 我国经济增长的阶段性、波动性和在险增长水平度量 [J]. 数量经济技术经济研究, (8): 11–14.
Liu J Q, (2002). Measurement of the Stages, Volatility, and Risk Growth Level of China's Economic Growth[J]. The Journal of Quantitative and Technical Economics, (8): 11–14.
- 刘金全, 张鹤, (2003). 经济增长风险的冲击传导和经济周期波动的溢出效应 [J]. 经济研究, (10): 32–39.
Liu J Q, Zhang H, (2003). The Transmission Mechanisms of Country Risks and Spillover Effects of Business Cycles in China's Economy[J]. The Economic Journal, (10): 32–39.
- 刘树成, (2000). 论中国经济增长与波动的新态势 [J]. 中国社会科学, (1): 114–122.
Liu S C, (2000). On the New Trend of Growth and Fluctuations in Chinese Economy[J]. Social Science in China, (1): 114–122.
- 彭实戈, (2017). 非线性期望的理论、方法及意义 [J]. 中国科学: 数学, 47(10): 1223–1254.
Peng S G, (2017). Theory, Methods and Meaning of Nonlinear Expectation Theory[J]. Scientia Sinica Mathematica, 47(10): 1223–1254.
- 孙志华, 尹俊平, 陈菲菲, 叶雪, (2016). 非参数与半参数统计 [M]. 北京: 清华大学出版社.
Sun Z H, Yin J P, Chen F F, Ye X, (2016). Non Parametric and Semi parametric Statistics[M]. Beijing: Tsinghua University Press.
- 王增武, (2012). 金融经济领域中的不确定性研究综述 [J]. 金融评论, 4(2): 85–95.
Wang Z W, (2012). A Survey of Ambiguity in Finance and Economics[J]. Chinese Review of Financial Studies, 4(2): 85–95.
- 张晓晶, 刘磊, (2020). 宏观分析新范式下的金融风险与经济增长 —— 兼论新型冠状病毒肺炎疫情冲击与在险增长 [J]. 经济研究, 55(6): 4–21.
Zhang X J, Liu L, (2020). Financial Risk and Economic Growth under the New Paradigm of Macro-analysis on the Impact of the Covid-19 Pandemic and Growth at Risk[J]. The Economic Journal, 55(6): 4–21.
- 张晓晶, 王增武, (2021). 非线性期望框架下的在险增长 —— G-VaR 方法 [R]. 北京: 中国社会科学出版社.
Zhang X J, Wang Z W, (2021). Growth-at-Risk under the Framework of Nonlinear Expectation —— The Approach of G-VaR[R]. Beijing: China Social Science Press.
- 严加安, (2012). 金融数学引论 [M]. 北京: 科学出版社.
Yan J A, (2012). Introduction to Financial Mathematics[M]. Beijing: Science Press.
- 何声武, 汪嘉冈, 严加安, (1995). 半鞅与随机分析 [M]. 北京: 科学出版社.

- He S W, Wang J G, Yan J A, (1995). *Semimartingales and Stochastic Analysis*[M]. Beijing: Science Press.
- Adrian T, Boyarchenko N, Giannone D, (2019). Vulnerable Growth[J]. *American Economic Review*, 109(4): 1263–1289.
- Adrian T, Boyarchenko N, (2012) Intermediary Leverage Cycles and Financial Stability[R]. Federal Reserve Bank of New York Staff Report.
- Blanchard O J, Summers L H, (2017). Rethinking Stabilization Policy: Evolution or Revolution[J]. NBER Working Paper, No. 1124.
- Brunnermeier M, Sannikov Y, (2014). A Macroeconomics Model with a Financial Sector[J]. *American Economic Review*, 104(2): 379–421.
- Black F, (1987). *Business Cycles and Equilibrium*[M]. New York: Wiley.
- Chen X, Hansen L, Hansen G, (2021). Robust Identification of Investor Belief[R]. Working paper.
- Chen Z, Epstein L G, (2022). A Central Limit Theorem for Sets of Probability Measures[J]. *Stochastic Process and their Application*, 152(10): 424–451.
- Chen Z, Epstein L G, Zhang G, (2023). A Central Limit Theorem, Loss Aversion and Multi-Armed Bandits[J]. *Journal of Economic Theory*, 209(4): 1–35.
- Denis L, Martini C, (2006). A Theoretical Framework of the Pricing of Contingent Claims in the Presence of Model Uncertainty[J]. *The Annals of Applied Probability*, 16(2): 827–852.
- Epstein L, Ji S, (2013). Ambiguous Volatility and Asset Pricing in Continuous Time[J]. *The Review of Financial Studies*, 26: 1740–1786.
- Epstein L, Ji S, (2014). Ambiguous Volatility, Possibility and Utility in Continuous Time[J]. *Journal of Mathematical Economics*, 50: 269–282.
- Epstein L, Ji S, (2021). Optimal Learning under Robustness and Time-Consistency[J]. *Operations Research*, 70: 1317–1329.
- Franta M, Gambacorta L, (2020). On the Effects of Macroprudential Policies on Growth-at-Risk[J]. *Economics Letters*, 196: 1–3.
- Föllmer H, Scheid A, (2016). *Stochastic Finance*[M]. Germany: DE GRUYTER.
- Hansen L P, (2014). Noble Lecture: Uncertainty Outside and Inside Economic Models[J]. *Journal of Political Economy*, 30: 945–987.
- Hansen P G, (2022). New Formulation of Ambiguous Volatility with an Application to Optimal Dynamic Contracting[J]. *Journal of Economic Theory*, 199: 1–31.
- Hu M, Peng S, (2021). G-Lévy Process under Sublinear Expectation[J]. *Probability, Uncertainty and Quantitative Risk*, 6: 1–22.
- Hu M, Ji S, (2018). A Note on Pricing of Contingent Claims under G-expectation[J]. arXiv: 1303.4274V1.
- IMF, (2017). Global Financial Stability Report: Is Growth at Risk[R]. October.
- Jin H, Peng S, (2021). Optimal Unbiased Estimation for Maximal Distribution[J]. *Probability, Uncertainty and Quantitative Risk*, 6(3): 189–198.
- Jorion P, (2007). *Value at Risk: The New Benchmark for Management Financial Risk*[M]. New York: McGraw-Hill.
- Knight F, (1921). *Risk, Uncertainty and Profit*[M]. Boston: Houghton Mifflin Co.
- Nendel M, (2021). Markov Chains under Nonlinear Expectation[J]. *Mathematical Finance*, 31: 474–507.
- Peng S, (2004). Filtration Consistent Nonlinear Expectations and Evaluations of Contingent Claims[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 20: 1–24.

- Peng S, (2005). Nonlinear Expectation and Nonlinear Markov Chains[J]. Chinese Annals of Mathematics B, 26(2): 159–184.
- Peng S, (2006). G-Expectation, G-Brownian Motion and Related Stochastic Calculus of Ito's Type[J]. Stochastic Analysis and Applications, 541–567.
- Peng S, (2019). Nonlinear Expectations and Stochastic Calculus under Uncertainty[J]. First Edition. Doi: 10.48550/arXiv.1002.4546.
- Peng S, Yang S, Yao J, (2021). Improving Value-at-Risk Prediction under Model Uncertainty[J]. Journal of Financial Econometrics, 21(1): 228–259.
- Peng S, Yang S, (2020). Autoregressive Models of Time Series under Volatility Uncertainty and Application to VaR Model[J]. arXiv: 2011.09226v1.
- Peng S, Yang S, (2021). Distributional Uncertainty of the Financial Time Series Measured by G-expectation[J]. arXiv: 2011.09226v2.
- Ramsey G, Ramsey V A, (1995). Cross Country Evidence on the Link Between Volatility and Growth[J]. The American Economic Review, 85(5): 1138–1151.
- Wang Y, Yao Y, (2001). Measuring Economic Downside Risk and Severity: Growth at Risk[R]. World Bank Working Papers: 2474.
- Wang Z, Yan J, (2007). A Selective Overview of Applications of Choquet Integrals[R]. Advanced Lectures in Mathematics, 484–515.
- Yang S, Yao J, (2021). Linear Regression under Model Uncertainty[J]. arXiv: 2108.02140v1.